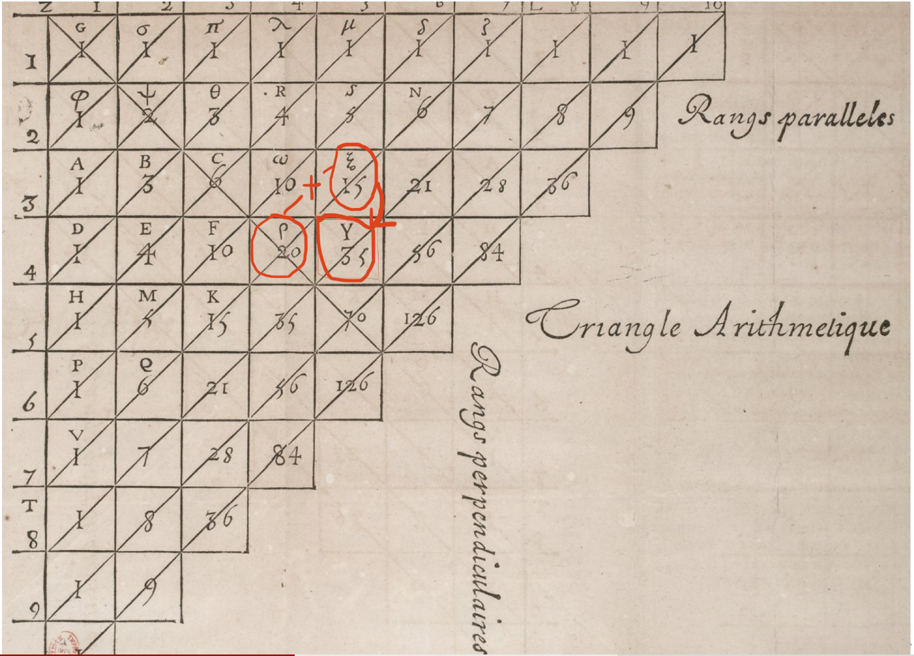
Le triangle arithmétique de Pascal

Vallon

14 octobre 2018


Rangs paralleles
Triangle Arithmetique
Rangs perpendiculaires

1. Dans le traité sur le triangle arithmétique Pascal construit un tableau triangulaire, appelé **triangle arithmétique**, par récurrence :
2. Il numérote des lignes 1,2,3, etc puis des colonnes 1,2,3 etc..., la première colonne et la première ligne sont remplies de 1 appelé le générateur.
3. Tout autre nombre du triangle est obtenu en ajoutant le nombre voisin du dessus et le nombre voisin à gauche.

Si on note $T_{i,j}$ le nombre de la ième ligne et de la j ième colonne , les règles de construction sont :

1. $T_{1,k} = T_{k,1} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (initialisation)
2. $T_{i,j} = T_{i,j-1} + T_{i-1,j}$ pour tout $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$ (relation de récurrence)

Dictionnaire :

1. Exposant = numéro de ligne ou de colonne
2. Générateur = nombre mis dans la première ligne et première colonne
3. Cellule = un nombre du tableau
4. Rang parallèle = ligne du tableau
5. Rang perpendiculaire = colonne du tableau
6. Base = diagonale du tableau reliant deux exposants égaux

Conséquence seconde :

En tout triangle arithmétique , chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallèle précédent, comprises depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclus

Preuve

Soit une cellule quelconque ω, je dis qu'elle est égale à $R+\theta+\psi+\phi$ qui sont celles du rang parallèle supérieur depuis le rang perpendiculaire de ω, jusqu'au premier rang perpendiculaire. Cela est évident par la seule interprétation des cellules, par celles d'où elles sont formées

Car ω , égale $R+\underbrace{C}_{\theta+\underbrace{B}_{\psi+\underbrace{A}_{\phi}}}$

Car A et ϕ sont égaux entre eux

Donc ω égale à $R+\theta+\psi+\phi$

Une preuve "actuelle"

Soit $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. On écrit $j-1$ égalités et on les ajoute

$T_{i,j} = T_{i,j-1} + T_{i-1,j}$

$T_{i,j-1} = T_{i,j-2} + T_{i-1,j-1}$

....

$T_{i,3} = T_{i,2} + T_{i-1,3}$

$T_{i,2} = T_{i,1} + T_{i-1,2} = T_{i-1,1} + T_{i-1,2}$

Par élimination (de part et d'autre des termes s'éliminent) on obtient :

$T_{i,j} = T_{i-1,j} + T_{i-1,j-1} + ... + T_{i-1,2} + T_{i-1,1}$

Conséquence douzième :

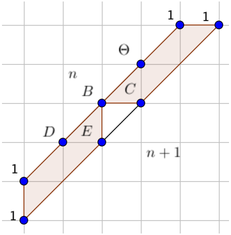
En tout triangle arithmétique,deux cellules contigues étant dans une même base,la supérieure est à l'inférieure,comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu' au haut de la base, à la multitude de celles, depuis l'inférieure jusqu'en bas inclus

Preuve

Quoi que cette proposition ait une infinité de cas , j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes
Le 1. qui est évident de soi-même, que cette proposition se rencontre dans la seconde base ; car il est bien visible que ϕ est à σ comme 1, à 1.
Le 2. que si cette proposition se trouve dans une base quelconque elle se trouvera nécessairement dans la base suivante
D'où il se voit, qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base, par le premier lemme, donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à "l'infiny"

Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte
Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, comme en la quatrième $D\lambda$, c'est à dire , si D est à B comme 1 à 3. Et B à θ comme 2 à 2. Et θ à λ comme 3 à 1 etc
Je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, $H\mu$, et que par exemple E est à C comme 2 à 3
Car D est à B comme 1 à 3, par l'hypothèse
Donc $\underbrace{D+B}_{E}$ est à B comme $\underbrace{1+3}_{4}$ à 3
Donc E est à B comme 4 à 3
De même B est à θ comme 2 à 2, par l'hypothèse
Donc $\underbrace{B+\theta}_{C}$ est à B comme $\underbrace{2+2}_{4}$ à 2
Donc C est à B comme 4 à 2
Mais B est à E comme 3 à 4 comme il est montré
Donc C est à E comme 3 à 2

Hérédité : de n à $n+1$



$<1, B>$ est le nombre de cellules de 1 jusqu'à B

Par hypothèse D est à B comme $<1, D>$ à $<B, 1>$ donc $D + B = E$ est à B comme $<1, D> + <B, 1>$ à $<B, 1>$

Par hypothèse B est à Θ comme $<1, B>$ à $<\Theta, 1>$ donc $B + \Theta = C$ est à B comme $<1, B> + <\Theta, 1>$ à $<1, B>$

$$\frac{C}{E} = \frac{<1, B> + <\Theta, 1>}{<1, B>} \times \frac{<B, 1>}{<1, D> + <B, 1>} = \frac{<B, 1>}{<1, B>}$$

$$\frac{C}{E} = \frac{<C, 1>}{<1, E>}$$

Exercice :

Montrer que la douzième proposition équivaut à :

Pour tout $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k < n$ on a $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \dfrac{k+1}{n-k}$

- Une preuve pour Blaise Pascal n'est pas rédigée selon les exigences actuelles.
- Dans la preuve de la deuxième proposition il prend comme cellule quelconque la cellule particulière ω, cependant l'idée générale est présente et il suffit de peu pour réécrire la preuve pour une cellule quelconque $T_{i,j}$
- On trouve dans la douzième proposition une formulation claire du raisonnement par récurrence (initialisation + hérédité) permettant de prouver une infinité de propositions (infini dénombrable).
- L'époque est plus à la découverte qu'à la recherche de fondements, il faudra attendre le XIX ième siècle pour clarifier le statut mathématique des différents infinis.