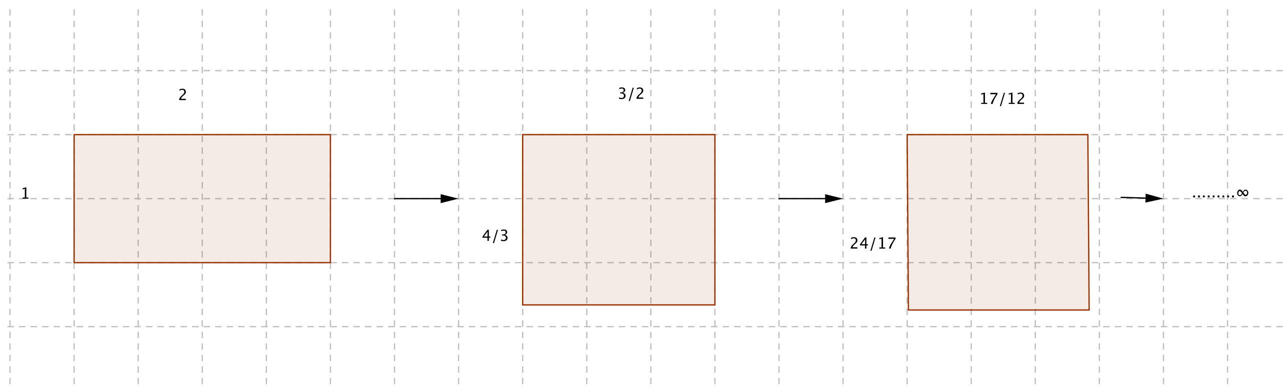
Suites

1 Problématique

Comment calculer des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et plus généralement $\sqrt{a}$ où a est un réel positif ?

2 Algorithme de Héron d'Alexandrie (I siècle apr JC)



Partir d'un rectangle de largeur 1 et de longueur 2 . L'aire du rectangle est donc 2
Puis répéter un certain nombre de fois le processus suivant :

1. Remplacer la longueur par la moyenne de l'ancienne longueur et l'ancienne largeur, donc pour la première fois on obtient $\frac{3}{2}$
2. Ensuite pour que le nouveau rectangle ait toujours pour aire 2 attribuer à l'autre côté le quotient de 2 par la nouvelle longueur, donc pour la première fois on obtient $\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$

Exercice Vérifier que pour le deuxième rectangle la longueur vaut et la largeur vaut

Intuitivement on se rend compte que ce processus engendre des rectangles de plus en plus carrés et d'aire toujours égale à 2

Or un des côtés d'un des rectangles pourvu que le processus ait duré suffisamment sera donc proche de $\sqrt{2}$

Mais en Mathématiques on ne peut pas se contenter de l'intuition il faut prouver ce que l'on avance !

Prouver signifie produire une suite de déductions à partir de notions **clairement définies**

Traduction en langage mathématique

On note L_n la suite des valeurs des longueurs avec $L_0 = 2$ et l_n la suite des largeurs avec $l_0 = 1$

La règle 1 se traduit par $L_{n+1} = \frac{1}{2}(L_n + l_n)$

La règle 2 se traduit par $l_{n+1} = \dfrac{2}{L_{n+1}}$

Problème A-t-on **toujours** $l_n < L_n$?

On peut simplifier les deux règles en une seule :

$L_{n+1} = \dfrac{L_n + l_n}{2} = \dfrac{1}{2}(L_n + l_n) = \dfrac{1}{2}(L_n + \dfrac{2}{L_n})$ avec $L_0 = 2$

On dit que L_n est une suite **récurrente** car chaque terme L_n engendre le terme suivant L_{n+1} toujours de la même manière par l'application d'une **fonction**

Ici f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x})$

Traduction en langage algorithmique

On définit deux fonctions

f(x)

  Retourner $\dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x})$

racine(n)

  $L \longleftarrow 2$

  Répéter

   $L \longleftarrow$ f(L)

  Retourner(L)

Traduction en Python

```
def f(x):
    return (x + 2/x)/2
def racine(n):
    L = 2
    for i in range(n):
        L = f(L)
    return L
```

On exécute plusieurs fois cette fonction et on observe que les valeurs affichées au bout de 5 répétitions seulement ont **15 décimales exactes**

Que signifie cette expression ? Y-aurait-il quelque part une vraie valeur de $\sqrt{2}$?

Pour répondre à ces questions il faut faire des mathématiques

```
1.4142135623730951
n =  1    1.5
n =  2    1.4166666666666665
n =  3    1.4142156862745097
n =  4    1.4142135623746899
n =  5    1.414213562373095
n =  6    1.414213562373095
```

3 Raisonnement par récurrence

Plus loin nous donnerons un sens mathématique à la notion de limite et nous pourrons prouver que la suite L_n a pour limite $\sqrt{2}$

Nous verrons aussi un théorème "pratique" pour démontrer qu'une suite a une limite.

Ce théorème dit que "si une suite est **décroissante** et **minorée** par un nombre réel alors elle a une limite "

Définition 1 *(L_n) est décroissante*
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $L_{n+1} \leqslant L_n$

Définition 2 *(L_n) est minorée par un réel a*
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $L_n \geqslant a$

Or on observe que L_n est décroissante sur les 7 premières valeurs mais qu'en est il ensuite ?

Comment être sûr que $L_{2021} \leqslant L_{2020}$?

Il nous faudrait calculer les valeurs et vérifier que l'une est plus petite que l'autre or il faudrait faire une infinité de calculs c'est impossible !

On va pour cela utiliser une technique de démonstration appelée **démonstration par récurrence**

Pour comprendre le raisonnement par récurrence nous allons démontrer une formule vue en première :

Théorème 1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$*

Nous pouvons fournir une preuve directe de ce théorème mais nous allons illustrer la notion de démonstration par récurrence

C'est vrai pour $n=1$ car d'une part $1+2+...+n=1$ et d'autre part $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1(2)}{2} = 1$

C'est vrai pour $n=2$ car d'une part $1+2+...+n = 1+2 = 3$ et d'autre part $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{2(3)}{2} = 3$

C'est vrai pour $n=3$ car d'une part $1+2+...+n = 1+2+3 = 6$ et d'autre part $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Nous ne pouvons pas vérifier pour chaque valeur de n car il y en a une infinité

L'idée du raisonnement par récurrence (lorsque c'est possible) est de **prouver que la vérité est héréditaire** dans le sens où si la propriété est vraie à l'étape n alors elle sera vraie à l'étape $n+1$

Et si on prouve aussi que la propriété est vraie au moins une fois par exemple pour une valeur initiale n_0 par exemple $n_0 = 0$, ou $n_0 = 2$ ou $n_0 = 100\ 000$

Ensuite la vérité va se propager de n_0 à n_0+1 puis de n_0+1 jusqu'à n_0+2 etc...

Pour expliciter le etc...nous introduisons un nouvel axiome

Axiome de récurrence
Soit (P_n) une suite de propositions où n est un entier

1. **Initialisation** Il existe une valeur n_0 telle que P_{n_0} est vraie
2. **Hérédité** Pour tout entier $k \geqslant n_0$, si P_k est vraie alors P_{k+1} l'est aussi

conclusion :
P_n est vraie pour tout n entier $\geqslant n_0$

Exemples

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   Preuve par récurrence

   (a) Initialisation :
   C'est vrai pour $n = 1$ car d'une part $1 + 2 + ... + n = 1$ et d'autre part $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1(2)}{2} = 1$

   (b) Hérédité
   Supposons que la propriété est vraie pour $n \geqslant 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$
   Par hypothèse $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   Ajoutons $n+1$ de part et d'autre on obtient
   $1+2+...+n+n+1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)(1+\dfrac{n}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$
   Autrement dit on a montré que la propriété est vraie au rang $n+1$

   (c) D'après l'axiome de récurrence la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$

2. Pour tout $n \geqslant 5$ on a $n! \geqslant 3^{n-1}$

   Preuve par récurrence

   (a) Initialisation :
   C'est vrai pour $n = 5$ car d'une part $5! = 120$ et d'autre part $3^4 = 81$ et $120 \geqslant 81$

   (b) Hérédité
   Supposons que la propriété est vraie pour $n \geqslant 5$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$
   Par hypothèse $n! \geqslant 3^{n-1}$
   Multiplions par $n+1 > 0$ de part et d'autre on obtient
   $n! \times (n+1) = (n+1)! \geqslant 3^{n-1} \times (n+1)$
   Or $n \geqslant 5$ donc $n+1 \geqslant 3$ donc $3^{n-1} \times (n+1) \geqslant 3^{n-1} \times 3 = 3^n$
   On a donc montré que $(n+1)! \geqslant 3^n$
   Autrement dit on a montré que la propriété est vraie au rang $n+1$

   (c) D'après l'axiome de récurrence la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$

Remarque La démonstration par récurrence ne sert qu'à prouver une propriété qui a été découverte par d'autres moyens