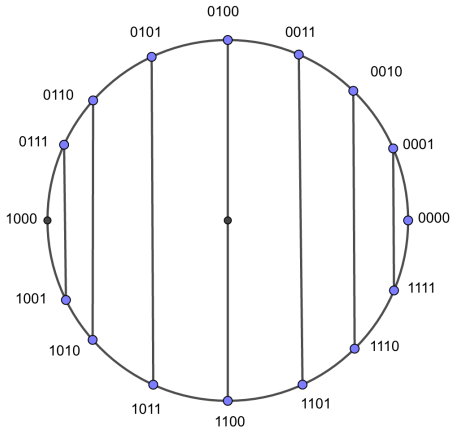
Représentation binaire d'un entier relatif

Comment représenter les entiers négatifs ?

1. *Une première approche* : Par exemple sur un octet on va coder 4 par 0000 0100 et pour coder -4 on va utiliser **un bit significatif** celui qui est le "plus à gauche" dit **bit de poids fort** que l'on va mettre à 1 pour dire que ce nombre est négatif et on ne change pas les autres bits ce qui donne
   $-4 = (10000100)_2$
   Calculons $-4 + 4 = (10001000)_2$ qui vaut -8 avec notre convention au lieu de 0 ce qui est un problème !
2. *Une deuxième approche* Supposons que les entiers sont codés uniquement sur 4 bits et plaçons les mots de 4 bits dans l'ordre croissant de 0000 jusqu'à 1111 sur un cercle de la manière suivante : on apparie ensemble les mots de telle sorte que la somme des deux mots donne toujours 1 0000 que l'on va assimiler à 0
   On a donc apparié les entiers positifs et leur opposé on choisit pour positifs les mots de 4 bits **dont le bit de poids fort est 0** et les négatifs ceux dont le bit de poids fort est 1
   Ainsi 2 est codé par 0010 et -2 par 1110



Théorème 1. *(Complément à 2) Si les entiers relatifs sont codés sur n bits alors :*

1. *Il y a $2^{n-1} - 1$ mots ayant un bit de poids fort égale à 0, ils servent à coder les entiers positifs*
2. *Les mots précédents ont un opposé obtenu en remplaçant chaque chiffre par son complément et en ajoutant 1*

Preuve

Soit $m = c_n c_{n-1}....c_0$ avec $c_i \in \{0, 1\}$ et $c_n = 0$ et où $\overline{c_i}$ le complémentaire de c_i
Considérons $\overline{m} = \overline{c_n c_{n-1}}....\overline{c_0}$ donc $m + \overline{m} = 11....11$ (que des 1)
donc $m + \overline{m} + 1 = m + (\overline{m} + 1) = 1$ 00...00 que l'on assimile à 0, et l'opposé de m et $\overline{m} + 1$

Exemple

Sur 16 bits 2019 est codé par 0000 0111 1110 0011 donc pour trouver le code de son opposé on prend le complémentaire 1111 1000 0001 1100 puis on ajoute 1 ce qui donne pour le codage de -2019 –> 1111 1000 0001 1101

Exercices

Ex 1

Sur 8 bits coder -1 et -4

Combien de nombres négatifs peut on coder sur 8 bits ?

Ex 2

Sur 16 bits coder -15,-16,-31 et -32

Combien de nombres négatifs peut on coder sur 16 bits ?

Ex 3

Sur 32 bits coder -7 et -8

Combien de nombres négatifs peut on coder sur 32 bits ?

Ex 4

1. Les systèmes d'exploitation actuels codent les entiers sur 64 bits. Quel est le plus grand entier naturel représentable en machine ?
2. Combien peut-on coder de nombres négatifs sur 64 bits ?

Ex 5

Quel entier relatif est codé par 1111 1000 sur 8 bits ?

Ex 6

Quel entier relatif est codé par 1111 1111 1111 1000 sur 16 bits ?