Principe de relativité. Modélisation mathématique

On appelle évènement un phénomène localisé de façon "ponctuelle" en P dans l'espace et le temps : Un évènement est caractérisé par les coordonnées d'espace $(x; y; z)$ par rapport à un repère ou référentiel $\mathcal{R}$ $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et l'instant t d'observation d'où :

$$\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

x, y et z sont des fonctions du temps t, puisqu' à priori P se déplace relativement à $\mathcal{R}$. En mécanique classique le temps est supposé absolu c'est à dire indépendant du référentiel.

On définit la vitesse de P par rapport à $\mathcal{R}$ par

$\overrightarrow{v}_{P/\mathcal{R}} = \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{OP}) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{i} + \dot{y}(t)\,\overrightarrow{j} + \dot{z}(t)\,\overrightarrow{k}$

On définit l'accélération de P par rapport à $\mathcal{R}$ par

$\overrightarrow{a}_{P/\mathcal{R}} = \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{v}_{P/\mathcal{R}}) = \ddot{x}\,\overrightarrow{i} + \ddot{y}\,\overrightarrow{j} + \ddot{z}\,\overrightarrow{k}$

Principe de Newton. Equation différentielle : La modélisation du mouvement de P relativement à $\mathcal{R}$ se fait via une équation différentielle :

$$\overrightarrow{a}_{P/\mathcal{R}} = F(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{V}_{P/\mathcal{R}}, t)$$

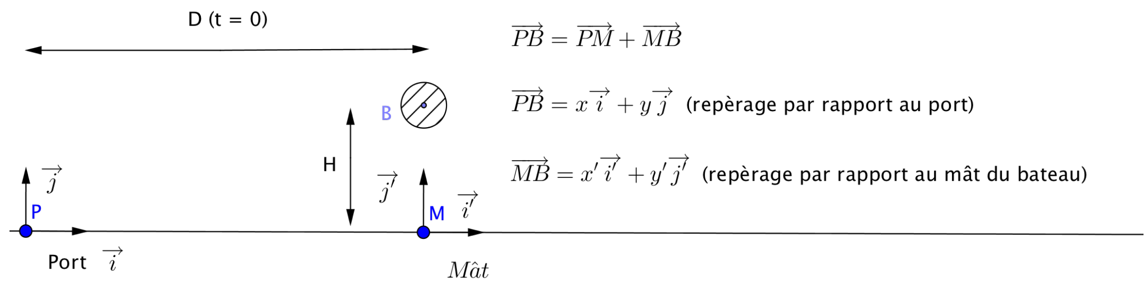
où F est une fonction très générale qui définit l'équation différentielle. Les conditions initiales, la position de P à l'instant initial et la vitesse de P à l'instant initial vont déterminer une solution unique de cette équation différentielle (un mouvement unique)

Principe de relativité en Mécanique classique : "On sait que la loi fondamentale de la mécanique de Galilée-Newton, connue sous le nom de la loi de l'inertie, est exprimée dans les termes suivants : Un corps suffisamment éloigné d'autres corps persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme. Cette proposition n'énonce pas pas seulement quelque chose concernant les mouvements des corps, mais elle nous dit aussi quels corps de référence ou systèmes de coordonnées sont admissibles et peuvent être employées pour la description mécanique...Un système de coordonnées dont l'état de mouvement est tel que relativement à lui la loi de l'inertie reste valable est appelé système de coordonnées galiléen"(Einstein, *La relativité*(Petite bibliothèque Payot 1956))

Dans ce cas $\overrightarrow{a}_{P/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$ donc $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ donc $\dot{x}$ et $\dot{y}$ et $\dot{z}$ constants ce qui correspond à un état de repos ou à un mouvement rectiligne et uniforme dans le référentiel

"Si K' est relativement à K(galiléen) un système de coordonnées qui effectue un mouvement uniforme sans rotation, les phénomènes de la nature se déroulent relativement à K' conformément aux mêmes lois générales que relativement à K. Nous appelons cet énoncé "principe de relativité" dans le sens restreint (Einstein, *La relativité*)

Exemple :



Une balle est lâchée du haut d'un mât d'un bateau qui navigue sur une mer "calme" à une vitesse constante v_e par rapport au port. On suppose que le port est un référentiel galiléen.

1. **Mouvement relativement au repère du bateau** : la loi générale est ici la loi de la gravitation donc le modèle mathématique ou équation différentielle est :

$$\ddot{x'}\overrightarrow{i'} + \ddot{y'}\overrightarrow{j'} = -g\overrightarrow{j'}$$
$$x'(0) = 0 \qquad y'(0) = H \qquad \dot{x}'(0) = 0 \qquad \dot{y}'(0) = 0$$

   Résoudre cette équation différentielle et montrer que le mouvement unique de la balle relativement au bateau est modélisé par $x'(t) = 0$ et $y'(t) = H - \dfrac{1}{2}gt^2$

2. **Mouvement relativement au port**
   le modèle mathématique ou équation différentielle est :

$$\ddot{x}\overrightarrow{i} + \ddot{y}\overrightarrow{j} = -g\overrightarrow{j}$$
$$x(0) = D \qquad y(0) = H \qquad \dot{x}(0) = v_e \qquad \dot{y}(0) = 0$$

   Justifier que la solution est $x(t) = v_e t + D$ et $y(t) = H - \dfrac{1}{2}gt^2$

3. **Transformation de Galilée**
   On appelle transformation de Galilée la fonction $T : (x, y, z) \to (x', y', z')$ précédemment on a obtenu :
   $x = x' + v_e t + D$ et $y = y'$
   Application Un avion volant à l'horizontale à vitesse constante v_e , à une altitude stable H, doit larguer un chargement C (sans parachute) en un point P. A quelle distance D de l'objectif doit il larguer son chargement ?
   Application numérique : $H = 200$ m ; $v_e = 100$ km/h ; $g = 10$ m/s^2 et $H = 1000$ m ; $v_e = 400$ km/h ; $g = 10$

4. **Problèmes** :
   (a) Que se passe-t-il lorsque un référentiel est en rotation uniforme par rapport à un référentiel galiléen ? (pendule de Foucault)
   (b) Le temps est il absolu ? (incompatibilité apparente de la loi de la propagation de la lumière et du principe de la relativité)
   (c) Si la matière disparait reste-t-il un "espace" et un "temps" ?