

# Raisonnement par récurrence

Vallon

1<sup>er</sup> septembre 2015

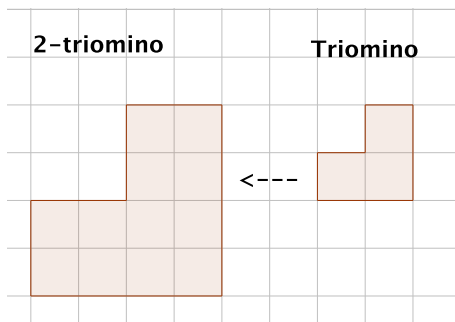
- 1 Capacités attendues
- 2 Axiome de récurrence
- 3 Une propriété de la suite de Sylvester

# Capacités attendues

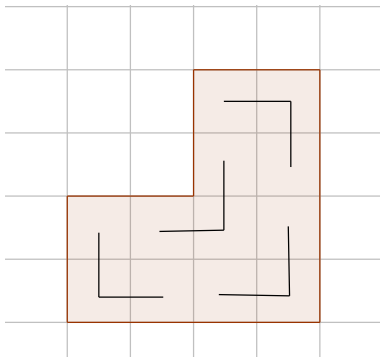
- Savoir mener un raisonnement par récurrence

## Problème :

- Un triomino est une pièce formée de 3 cases en forme de L
- Un 2-triomino est une ensemble sous forme de L, constitué de 3 carrés de côté de 2 cases
- Comment paver un 2-triomino avec des triominos ?

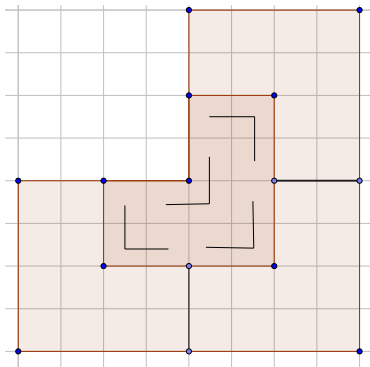


- On peut procéder ainsi
- Est ce la seule possibilité?



- Comment paver un 4-triomino ? un 8-triomino ?
- Peut on paver un  $2^n$  triomino pour tout  $n$  entier ?

- Au lieu de placer les triominos un à un pour paver le 4-triominos on **réutilise** ce qui a été fait précédemment
- On pave le 4-triominos avec des 2-triominos qui eux même sont pavés avec des triominos



- Le processus d'**emboîtement** peut se faire aussi loin que l'on veut
- Un 32-triomino peut être pavé par des 16-triominos et puisque chaque 16-triomino peut l'être par des triominos donc un 32-triomino peut être pavé par des triominos

- **Intuitivement** il nous semble **évident** que n'importe quel  $2^n$ -triomino peut être pavé par des triominos
- **Techniquement** il faut un **théorème** ou un **axiome** qui justifie cette façon de procéder

# Axiome de récurrence

## Axiome de récurrence

Soit  $(P_n)$  une suite de propositions où  $n$  est un entier

- Si la première proposition  $P_i$  est vraie (initialisation, en général  $i = 0$  ou  $i = 1$ )
- Pour tout entier  $k \geq i$ , si  $P_k$  est vraie alors  $P_{k+1}$  l'est aussi (hérédité)

**conclusion :**  $P_n$  est vraie pour tout  $n$  entier

## Théorème

Pour tout  $n$  **entier** tout  $2^n$  triomino peut être pavé par des triominos

## Démonstration.

On note  $P_n$ , la phrase "tout  $2^n$  triomino peut être pavé par des triominos"

- (Initialisation)  $P_1$  est vraie voir le schéma plus haut
- (Hérédité) Supposons que  $P_n$  est vraie,  $n$  un entier quelconque supérieur ou égal à 1, montrons que  $P_{n+1}$  est vraie  
 Pour pouvoir utiliser l'**hypothèse de récurrence** on va découper le  $2^{n+1}$  triomino en 4  $2^n$  triominos, et puisque chaque  $2^n$  triomino peut être pavé par des triominos, à son tour le  $2^{n+1}$  triomino peut être pavé par des triominos
- **Conclusion** D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout entier



Maintenant nous pouvons démontrer le théorème suivant :

### Théorème

*A partir du terme égal à 7, la somme **réduite** des chiffres du terme général  $(u_n)$  de la suite de Sylvester est **toujours** égale à 7*

## Démonstration.

**Admettons** qu'il existe une fonction appelée ici  $s$  qui à tout entier  $n$  associe la **somme réduite de ces chiffres** dans  $\{0, 1, \dots, 9\}$ ,  $s(n)$  et de plus cette fonction a les propriétés suivantes :

- $s(n + m) = s(n) + s(m)$
- $s(n \times m) = s(n) \times s(m)$

Nous allons faire une démonstration par récurrence

- Initialisation : La somme des chiffres de  $u_2 = 7$  vaut bien 7
- Hérédité : Montrons que **si**  $s(u_n) = 7$  **alors**  $s(u_{n+1}) = 7$  est vraie pour tout  $n$  entier

Supposons  $s(u_n) = 7$  or  $u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 1 = u_n^2 - u_n + 1$

Donc  $s(u_{n+1}) = s(u_n^2) - s(u_n) + s(1) = (s(u_n))^2 - s(u_n) + 1 = 7^2 - 7 + 1 = 43 \equiv 7$

