

Marche aléatoire sur un cube On part d'un sommet d'un cube choisi comme origine, marqué par le nombre 0, et on se déplace au hasard sur les arêtes de ce cube pour rejoindre les autres sommets.

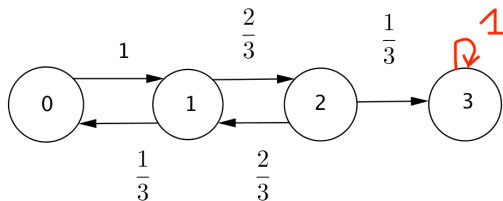
A la distance de une arête on trouve 3 sommets, tous marqués par le nombre 1. On suppose qu'on a la même chance d'atteindre ces 3 sommets.

Puis à la distance de 2 arêtes on trouve 3 sommets marqués par le nombre 2, et finalement on tombe sur le sommet diagonalement opposé à l'origine à une distance de 3 arêtes

On aimerait savoir le nombre **moyen** de déplacements pour passer de l'origine au sommet marqué par 3, lorsqu'on se déplace au hasard le long des arêtes

Simulation Créer un programme Python (avec des fonctions) pour simuler un parcours aléatoire et donner une estimation de ce nombre moyen

On pourra s'aider du **graphe probabiliste** suivant



Première Modélisation Soit N la variable aléatoire étant égale au **nombre d'arêtes** parcourus entre 0 et 3

Exercice

1. Quelles sont les valeurs possibles de N ?
2. Que valent $P(N = 3)$, $P(N = 5)$?
3. Conjecturer une formule pour $P(N = 2k + 1)$ avec $k \geq 1$
4. Montrer que $E(N) = 10$ (attention $E(N)$ est une limite)

Deuxième Modélisation On considère un **vecteur colonne** d'état $E_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$

où a_n est la probabilité d'être en 0 au bout de n déplacements

b_n est la probabilité d'être en 1 au bout de n déplacements

c_n est la probabilité d'être en 2 au bout de n déplacements

d_n est la probabilité d'être en 3 au bout de n déplacements

1. Donner E_0 , E_1 , E_2 et E_3 (s'aider du graphe probabiliste)
2. Exprimer a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} , d_{n+1} en fonction de a_n , b_n , c_n et d_n
3. Trouver une matrice T dite de **transition** telle que $E_{n+1} = TE_n$
Vérifier que :
 - (a) Tous les termes de la matrice sont compris entre 0 et 1
 - (b) La somme des éléments d'une colonne vaut 1 (pourquoi?). On dit alors que T est une matrice **stochastique** (selon les colonnes)
4. Par conséquent $E_n = T^n E_0$. Nous avons vu en exercice dans le précédent chapitre que les puissances de matrices diagonales sont faciles à calculer .
Les matrices stochastiques sont **similaires** au sens suivant à des matrices diagonales :

Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible S telles que

$$T = SDS^{-1}$$

Les nombres situés sur la diagonale principale sont appelés les **valeurs propres** de T

Exprimer T^n en fonction de D^n

5. On utilise numpy pour obtenir les valeurs propres de T en faisant `eigvals(T)`
`eigvals()` pour `eigenvalue = valeur propre` .
Les vecteurs colonnes de S sont appelés **vecteurs propres** de T
On note λ_1 la première valeur propre 1, que valent λ_2 , λ_3 et λ_4 ? (lire ci-dessous)

```

3.5.2 (default, Sep  3 2016, 16:46:41)
[GCC 4.8.1]
Python Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as alg
>>> T = np.array([[0,1/3,0,0],[1,0,2/3,0],[0,2/3,0,0],[0,0,1/3,1]])
>>> alg.eigvals(T)
array([ 1.,  0.8819171, -0.8819171,  0.        ])
>>> S = alg.eig(T)
>>> print(S[1])
[[ 0.00000000e+00  1.50971118e-01 -2.87177435e-01  5.34522484e-01]
 [ 0.00000000e+00  3.99432033e-01  7.59800076e-01  4.41036383e-18]
 [ 0.00000000e+00  3.01942236e-01 -5.74354871e-01 -8.01783726e-01]
 [ 1.00000000e+00 -8.52345387e-01  1.01732230e-01  2.67261242e-01]]

```

On constate que 1 est une valeur propre et que les autres valeurs sont en valeur absolue strictement inférieure à 1.

Ceci aura des conséquences importantes pour trouver le régime permanent ou l'état d'équilibre du système étudié

Le vecteur propre associé à 1 est $S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vérifier que $TS_1 = 1 \times S_1$

6. La matrice S des vecteurs propres est inversible cela signifie aussi que les vecteurs S_1, S_2, S_3 et S_4 sont **linéairement indépendants** cela signifie que la seule combinaison linéaire des S_i qui donne le vecteur nul est $\sum_{i=1}^4 0 \times S_i$, cela nous assure que tout vecteur de \mathbb{R}^4 donc par exemple E_0 s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des S_i .

Justifier que l'écriture matricielle de $E_0 = \sum_{i=1}^4 c_i \times S_i$ est $SC = E_0$ où C est le vecteur colonne composé des c_i

Pour obtenir C on utilise numpy en faisant (résolution de système) `alg.solve(S,E0)`

```

>>> E = np.array([[1],[0],[0],[0]])
>>> alg.solve(S[1],E)
array([[ 1.        ],
       [ 1.41938218],
       [-0.7461788 ],
       [ 1.06904497]])

```

7. Montrer par récurrence que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } E_n = T^n E_0 = T^n \left(\sum_{i=1}^4 c_i \times S_i \right) = \sum_{i=1}^4 c_i T^n S_i = \sum_{i=1}^4 c_i \lambda_i^n S_i$$

8. Justifier que si $n \rightarrow \infty$ alors E_n tend vers une limite E^*

(état permanent car $TE^* = E^*$) ?

($\lambda_1 = 1$ et les autres λ_i sont en valeur absolue strictement inférieurs à 1)

Troisième Modélisation On considère un **vecteur ligne** d'état $E_n = (a_n \ b_n \ c_n \ d_n)$

où a_n est la probabilité d'être en 0 au bout de n déplacements

b_n est la probabilité d'être en 1 au bout de n déplacements

c_n est la probabilité d'être en 2 au bout de n déplacements

d_n est la probabilité d'être en 3 au bout de n déplacements

1. Donner E_0, E_1, E_2 et E_3 (s'aider du graphe probabiliste)
2. Trouver une matrice T dite de **transition** telle que $E_{n+1} = E_n T$

Vérifier que :

- (a) Tous les termes de la matrice sont compris entre 0 et 1
- (b) La somme des éléments d'une ligne vaut 1 (pourquoi?)

On dit que T est une matrice stochastique (selon les lignes)

Par conséquent $E_n = E_0 T^n$.

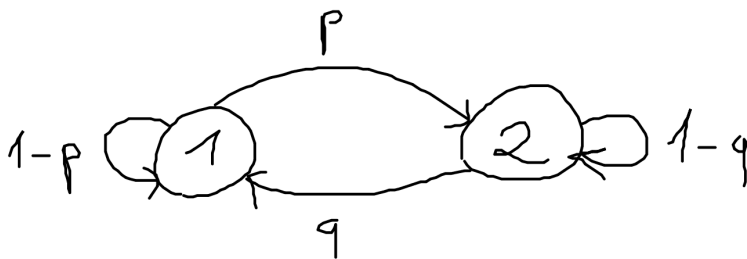
3. On définit la transposée M^T d'une matrice M de la manière suivante : si le terme général de M est m_{ij} avec n lignes et p colonnes, c'est à dire $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ alors le terme général de M^T est m_{ji} c'est donc une matrice avec p lignes et n colonnes

Par exemple si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $M^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

En admettant que $(AB)^T = B^T A^T$ montrer par récurrence que $E_n^T = (T^T)^n E_0^T$.

Conclusion ?

Echange de populations On observe l'échange de populations entre deux régions notées 1 et 2 au cours des ans. On a modélisé cet échange par le graphe probabiliste ci-dessous



1. Chaque année une proportion p de la région 1 émigre vers la région 2
2. Chaque année une proportion q de la région 2 émigre vers la région 1
3. A l'instant initial il y a un certain nombre A d'habitants dans la région 1 et un certain nombre B dans la région 2
4. L'état du système est décrit par un vecteur colonne $E_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où a_n (respectivement b_n) est le nombre d'habitants dans la région 1 (respectivement dans la région 2) au bout de n ans

Questions

1. Décrire la transition entre deux états successifs par une matrice de transition T . Vérifier que T est une matrice stochastique suivant les colonnes
2. Que valent E_0 et E_1 ?
3. Puisque $E_n = T^n E_0$, on cherche à simplifier le calcul de T^n .

Rappel concernant la suite de Fibonacci, d'un point de vue matriciel

Pour simplifier le calcul de A^n où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On avait deux vecteurs colonnes C_1 et C_2 non colinéaires tel que $AC_1 = \alpha C_1$ et $AC_2 = \beta C_2$

Ensuite en considérant la matrice $P = (C_1 \ C_2)$ inversible on avait montré que $P^{-1}AP$ est diagonale

Une valeur propre λ de T et un vecteur propre V_λ **non nul** associé à la valeur propre λ vérifient

$$TV_\lambda = \lambda V_\lambda$$

(Intuitivement vis à vis de certains vecteurs dits "propres", T se comporte comme une homothétie qui est une opération géométrique "simple")

$$TV_\lambda = \lambda V_\lambda \iff (T - \lambda I)V_\lambda = (0) \iff (*) \det(T - \lambda I) = 0$$

Vérifier que $P(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ est le polynôme du second degré

$$\lambda^2 - (2 - (p + q))\lambda + 1 - (p + q)$$

Vérifier que 1 est racine de $P(\lambda)$, en déduire l'autre racine λ_2 (penser relation racine-coefficient)

4. Considérer dans un premier temps les cas limites
5. Montrer que $|\lambda_2| < 1$
6. Chercher un vecteur propre "simple" V_1 pour la valeur propre 1, autrement dit, chercher V_1 tel que $TV_1 = V_1$
7. Chercher un vecteur propre "simple" V_2 pour la valeur propre λ_2 , autrement dit, chercher V_2 tel que $TV_2 = \lambda_2 V_2$
8. Soit P la matrice définie par $P = (V_1 \ V_2)$. Montrer que P est inversible. Que vaut $P^{-1}V_1$ et $P^{-1}V_2$?
9. En déduire l'expression de $D = P^{-1}TP$
10. En déduire l'expression de T^n
11. Que vaut E_n ? Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$

Autre façon

1. Décomposer E_0 comme une combinaison linéaire de V_1 et V_2 (autrement dit $E_0 = c_1 V_1 + c_2 V_2$ avec $c_i \in \mathbb{R}$)
2. Exprimer E_n en fonction de $c_1, V_1, c_2, \lambda_2, V_2$ et n
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$

propriété (*) Prouver que : Soit M une matrice carrée d'ordre 2, s'il existe un vecteur colonne X **non nul** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $MX = (0)$ alors les vecteurs colonnes M_1 et M_2 sont colinéaires autrement dit $\det(M) = 0$

Etudier la réciproque