

Autour de la fonction logarithme

Vallon

5 janvier 2015

- 1 Histoire
- 2 Logarithme décimal
- 3 Fonction \ln ou u

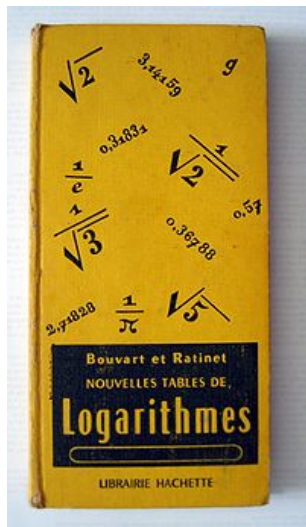


- John Napier (1550-1617) mathématicien écossais a introduit la notion de logarithme en 1614 (400 ans déjà!)
(en grec logos = rapport et arithmos = nombre)
- Il a construit une table mettant en rapport une suite géométrique et une suite arithmétique
- L'idée est de transformer des multiplications en additions pour les calculs en astronomie

1891 tables of logarithms/Tables de logarithmes de 1891 (D. Roegel, 2010)

N	Log	N	Log	N	Log	N	Log	N	Log
0	-----	50	·698 97000	100	·000 00000	150	·176 09126·	200	·301 03000·
1	·000 00000	51	707 57018·	101	004 32137	151	178 97695·	201	303 19606·
2	301 03000·	52	716 00334	102	008 60017	152	181 84359·	202	305 35137·
3	477 12125	53	724 27587·	103	012 83722	153	184 69143	203	307 49604·
4	602 05999	54	732 39376·	104	017 03334·	154	187 52072	204	309 63017·
5	·698 97000	55	·740 36269·	105	·021 18930·	155	·190 33170·	205	·311 75386
6	778 15125	56	748 18803·	106	025 30587·	156	193 12460·	206	313 86722
7	845 09804	57	755 87486·	107	029 38378·	157	195 89965	207	315 97035·
8	903 08999·	58	763 42799	108	033 42376·	158	198 65709·	208	318 06333
9	954 24251·	59	770 85201	109	037 42650·	159	201 39712	209	320 14629·
10	·000 00000	60	·778 15125	110	·041 39269·	160	·204 11998	210	·322 21929
11	041 39269·	61	785 32984·	111	045 32298·	161	206 82588·	211	324 28246·
12	079 18125·	62	792 39169·	112	049 21802	162	209 51501	212	326 33586
13	113 94335	63	799 34055·	113	053 07844	163	212 18760	213	328 37960
14	146 12804·	64	806 17997	114	056 90485	164	214 84385·	214	330 41377
15	·176 09126·	65	·812 91336·	115	·060 69784	165	·217 48394	215	·332 43846·
16	204 11998	66	819 54394·	116	064 45799·	166	220 10809	216	334 45375
17	230 44892	67	826 07480	117	068 18586	167	222 71647	217	336 45973
18	255 27251·	68	832 50891	118	071 88201·	168	225 30928	218	338 45649
19	278 75360	69	838 84909	119	075 54696	169	227 88670	219	340 44411
20	·301 03000·	70	·845 09804	120	·079 18125·	170	·230 44892	220	·342 42268
21	322 21929	71	851 25835·	121	082 78537	171	232 99611	221	344 39227
22	342 42268	72	857 33250·	122	086 35983	172	235 52845·	222	346 35297
23	361 72784·	73	863 32286	123	089 90511	173	238 04610	223	348 30486
24	380 21124	74	869 23172·	124	093 42169·	174	240 54925·	224	350 24862·

- Jusqu'en 1980 les lycéens français utilisaient des tables de logarithmes
- Les premières calculatrices ont été autorisées à partir de 1980



Définition

- Pour tout $x > 0$ le logarithme décimal est défini par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $10^n = (e^{\ln(10)})^n = e^{n \ln(10)}$
- Pour tout $x > 0$ on a $10^x = e^{x \ln(10)}$

Théorème

- $\log(10^x) = x$

Démonstration.

- $\log(10^x) = \log(e^{x \ln(10)}) = \frac{\ln(e^{x \ln(10)})}{\ln(10)} = \frac{x \ln(10)}{\ln(10)} = x$



Théorème

- $x \rightarrow \ln(u(x))$ est définie pour les réels x où $u(x) > 0$
- $x \rightarrow \ln(x(x+1))$ est définie sur $] -\infty; -1[\cup]0; +\infty[$
- $x \rightarrow \ln(x) + \ln(x+1)$ est définie sur $]0; +\infty[$
- **Attention !** $\ln(x(x+1)) = \ln(x) + \ln(x+1)$ *uniquement* sur $]0; +\infty[$

Théorème

- Si u est dérivable sur un intervalle J et si pour tout $x \in J$ on a $u(x) > 0$ alors $\ln \circ u$ est dérivable et pour tout $x \in J$ on a

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Démonstration.

$$x \rightarrow u(x) = y \rightarrow \ln(y) = \ln(u(x))$$

En utilisant le théorème de la dérivée d'une fonction composée

$$(\ln \circ u)'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$



- $f(x) = \ln(x(x + 1))$
- f est dérivable sur $] -\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2x + 1}{x(x + 1)}$