Calcul de probabilités

Vallon

18 novembre 2014

Problème

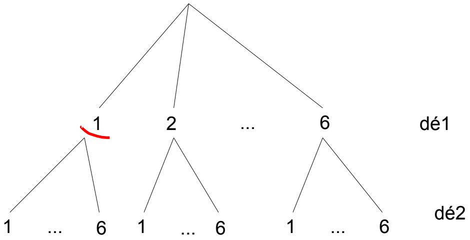
On lance 4 dés. Sur quoi parier :

1. l'évènement A : "Faire au moins un six"
2. l'évènement contraire $\bar{A}$:"Ne faire aucun six"

- Pour se faire une idée du problème simplifions le
- Commençons avec deux dés
- Comment prévoir ?

1. Faire des statistiques en lançant un grand nombre de fois deux dés et en calculant la fréquence d'apparition de deux dés autre que le six
2. Faire une simulation du problème en utilisant un tableur (ce qui revient au 3))
3. Faire des hypothèses nous permettant de calculer sans faire l'expérience la probabilité de l'évènement

- Pour chaque résultat d'un dé, l'autre dé a six possibilités. Autrement dit une issue de l'expérience aléatoire peut être représentée par un couple (a, b) où $1 \leqslant a \leqslant 6$ et $1 \leqslant b \leqslant 6$ ou un chemin dans l'arbre ci dessous
- En tout il y a $36 = 6 \times 6$ issues à l'expérience aléatoire "lancer deux dés"

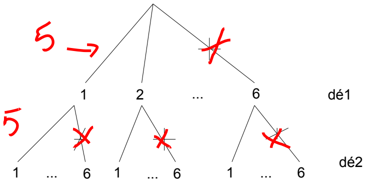


Définition

- L'univers Ω est l'ensemble de toutes les issues (en nombre fini) de l'expérience aléatoire. On le représente parfois par un arbre. Un chemin de l'arbre est une issue
- Un évènement est une partie de l'univers.
  Cela correspond à une partie de l'arbre, par exemple l'évènement "ne faire aucun six" où on coupe toutes les branches qui vont vers 6
- Calculer des probabilités c'est définir une fonction P associe à tout évènement A un nombre compris entre 0 et 1, la probabilité $P(A)$ de A tel que $P(\Omega) = 1$ et $P(\phi) = 0$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si et seulement si $A \cap B = \phi$ (additivité)

union

intersection



Théorème

- *Hypothèse Toutes les issues ont la même probabilité*
- *Dans ce cas pour tout évènement A , on a* $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Démonstration.

Un évènement A a un nombre fini $|A|$ d'issues et chacune de ces issues a la même probabilité disons p, donc par additivité $P(A) = |A| \times p$
L'univers Ω a un nombre fini $|\Omega|$ d'issues et chacune de ces issues a la même probabilité donc par additivité $P(\Omega) = |\Omega| \times p = 1$

Donc $p = \dfrac{1}{|\Omega|}$ et $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Théorème

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration.

- $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \phi$ donc $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $A \cup B = (A - (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B - (A \cap B))$ (union disjointe)
  Donc $p(A \cup B) = p(A) - p(A \cap B) + p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B)$
  $= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$\square$

On désigne par A :"faire au moins un six" et $\bar{A}$ "ne faire aucun six"
Les résultats numériques sont arrondis à 10^{-2} près

1. Pour 2 dés $P(\bar{A}) = \dfrac{5^2}{6^2} = 0,69 > P(A) = 0,31$
   On parie sur $\bar{A}$
2. Pour 3 dés $P(\bar{A}) = \dfrac{5^3}{6^3} = 0,58 > P(A) = 0,31$
   On parie sur $\bar{A}$
3. Pour 4 dés $P(\bar{A}) = \dfrac{5^4}{6^4} = 0,48 < P(A) = 0,52$
   On parie sur A