En introduction nous nous sommes intéressés plus aux propriétés algorithmiques liées aux nombres premiers.

Nous allons maintenant nous intéresser au problème d'analyse suivant :

Comment mesurer la taille de l'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N}$?

Infinité de nombres premiers Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers

Densité limite des nombres premiers dans $\mathbb{N}$ Pour certains sous-ensemble "réguliers" E de $\mathbb{N}$ on peut définir la notion de densité limite ainsi :

1. D'abord on calcule la densité des éléments de E inférieurs à un seuil m :

$$d_E(m) = \frac{|x \in E \ : \ x \leqslant m|}{m}$$

2. Si $d_E(m)$ a une limite quand $m \to +\infty$ alors on dit que E a pour densité limite cette limite

Il s'agit de démontrer sous forme d'exercice le **théorème de raréfaction de Legendre(1808)** :

Si on note $\pi(m)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m alors

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\pi(m)}{m} = 0$$

Intuitivement cela signifie que les nombres premiers bien qu'infinis se "raréfient" à l'infini

1. Montrer que les nombres pairs (ou impairs) ont une densité limite valant $\frac{1}{2}$

Théorème de raréfaction d'Euler