Le monde fascinant des polyèdres

Motivation

Pourquoi étudier un peu les polyèdres en enseignement d'exploration ? Parce que c'est un domaine qui stimule l'imagination et qui recèle beaucoup de belles propriétés.

Un peu d'étymologie

* poly = "plusieurs" ; èdre = "face" ; gone = "angle"
* le mot grec pour polyèdre est $\pi o\lambda\upsilon\epsilon\delta\rho o\nu$ en anglais polyhedron
* tetra = 4 ; penta = 5 ; hexa = 6 ; octo = 8 ; dodéca = 12 ; icosa = 20
* un polyèdre est **régulier** s'il n'est formé que de polygones réguliers ie ayant des côtés égaux
* un polyèdre est **convexe** s'il n'existe pas de points A et B à la surface du polyèdre qui puissent être reliés par un segment extérieur au polyèdre

Un peu d'Histoire

* Il n'y a que 5 polyèdres convexes réguliers (ou solides de Platon). Ce fait étonnant était connu à l'Antiquité . Platon (-428 av JC , -348 av JC) est né à Athènes 2 ans après la mort de Périclès, durant la guerre du Péloponnèse. Il a écrit des dialogues philosophiques. Dans un de ces dialogues, le Timée, il associe à chaque polyèdre un des 4 éléments.
  Au cube, il associe la Terre, à l'octaèdre l'Air, à l'icosaèdre l'Eau et au tétraèdre le Feu. Enfin le dodécaèdre symbolise le Tout, l'Univers.
* On retrouve aussi dans les Eléments d'Euclide (un ou plusieurs mathématiciens grecs d'Alexandrie -320 av JC , -260 av JC) une construction étonnante du dodécaèdre
* Kepler (1571,1630) est un astronome allemand qui a étudié et classé les polyèdres. Il a aussi cherché à **modéliser** les orbites des planètes du système solaire à partir des solides de Platon.
* Enfin le mathématicien suisse Schläfli (1850) classe tous les polyèdres, même ceux de dimension ≥ 3 (voir le film dimension)

Les polyèdres réguliers convexes et leur classification

1. à partir du triangle équilatéral : En partant d'un certain nombre de triangles équilatéraux posés sur la table, il s'agit d'imaginer comment en les "relevant" dans l'espace, faire un polyèdre régulier convexe. En déduire le patron du polyèdre.
   a) Avec deux triangles équilatéraux
   b) Avec trois triangles équilatéraux
   c) Avec quatre :
   d) Avec cinq : Que se passe-t-il si on réunit deux pyramides à base pentagonale ?Compter le nombre de faces arrivant à chaque sommet, est ce le même nombre pour tous les sommets ?Cette contrainte était t elle vérifiée précédemment ? Faut il l'intégrer à la définition ?
   e) Pourquoi cela ne sert à rien d'envisager le cas au delà de cinq ?
2. à partir du carré
3. à partir du pentagone régulier
4. Pourquoi cela ne sert à rien d'envisager le cas avec des polygones réguliers dont le nombre de côtés est supérieur strictement à 5 ?

Le monde fascinant des polyèdres

Quelques polyèdres semi-réguliers obtenus par troncature à partir des solides de Platon

On abandonne une des contraintes précédentes à savoir que toutes les faces soient un même polygone régulier.

On part des cinq solides de Platon et on va les **tronquer** plus ou moins "fortement". Tronquer signifie couper les sommets.

1. Cas du tétraèdre régulier $\{p = 3, q = 3\}$. Le tétraèdre tronqué

   Si on coupe les sommets (voir figure) , d'un triangle équilatéral on obtient un hexagone que l'on veut régulier.

   Problème : A quel endroit couper pour que cela soit vérifié ? Donner un dessin en perspective et un patron

   Si on coupe plus "fortement" que se passe -t- il ?
2. Cas du cube $\{p = 4, q = 3\}$. Le cube "faiblement" tronqué

   Si on coupe les sommets (voir figure) , d'un carré dans un premier temps (faiblement) on obtient un octogone que l'on veut régulier.

   Problème : A quel endroit couper pour que cela soit vérifié ? Donner un dessin en perspective et un patron
3. Cas du cube $\{p = 4, q = 3\}$. Le cube "fortement" tronqué

   Si on coupe les sommets (voir figure) , d'un carré "fortement" on obtient un carré . C'est le **cuboctaèdre**. L'union de deux solides de Platon "duaux" , le carré et l'octaèdre (voir maquette)
4. Cas de l'octaèdre $\{p = 3, q = 4\}$.

   En vous inspirant de ce qui précède décrire ce que l'on va obtenir à partir de l'octaèdre
5. Cas de l'icosaèdre $\{p = 3, q = 5\}$.l'icosaèdre "faiblement " tronqué (ou ballon de foot)
6. Cas de l'icosaèdre $\{p = 3, q = 5\}$.l'icosaèdre "fortement " tronqué ou **icosidodécaèdre**
7. Cas du dodécaèdre $\{p = 5, q = 3\}$.le dodécaèdre "faiblement " tronqué
8. Cas du dodécaèdre $\{p = 5, q = 3\}$.le dodécaèdre "fortement " tronqué