M.P.S : Noeuds rationnels (de Conway)-Séance 1 (2 heures)

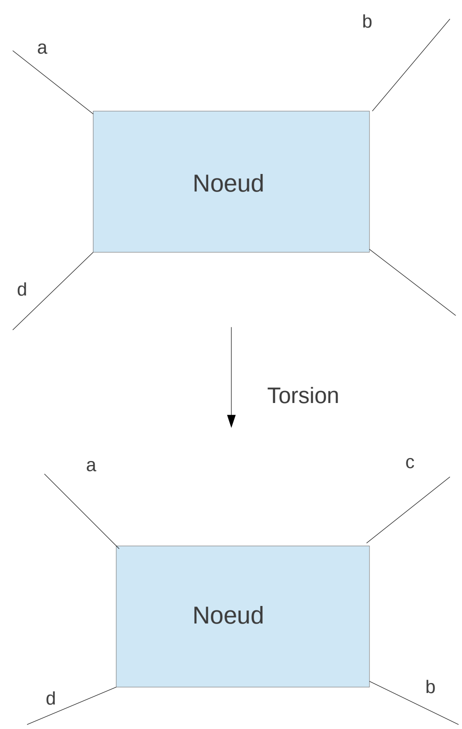
Jean-Pierre Vallon

Matériel :

1. Chaque élève a une paire de lacets
2. 2 cordes à sauter (pour faire une démonstration avec 4 élèves en début de séance)

Pour créer des noeuds ou le dénouer on n'utilise que deux opérations : la torsion T et la rotation R

Décrivons d'abord la torsion : on fait passer l'extrémité b par dessus l'extrémité c de telle sorte que l'extrémité b prenne la place de c.

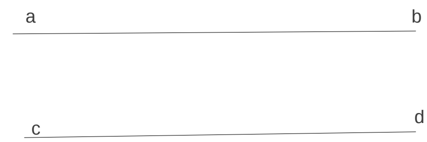


Nous allons associer à un noeud un nombre, en commençant par attribuer 0 à la situation où les eux lacets sont parallèles. Puis le nombre 1 au noeud obtenu en faisant une torsion à partir du noeud 0, puis le nombre 2 au noeud obtenu en faisant une torsion à partir du noeud représenté par 1.

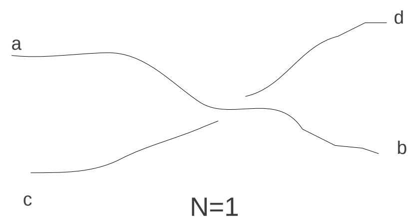
Exercice 1 Nous allons représenter la torsion T par un fonction. Ainsi nous pouvons écrire

$T(0) = 1$ et $T(1) = 2$.

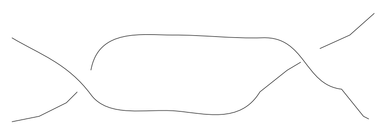
1. Quelle formule simple pourrait convenir à T ?



N=0



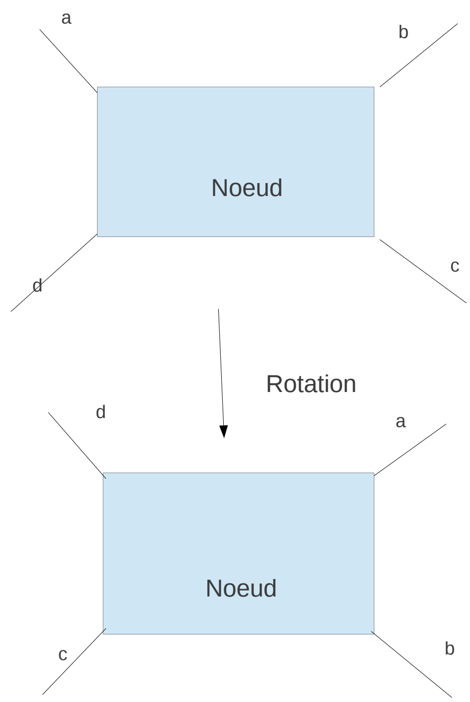
N=1



N=2

2. Dessiner les noeuds caractérisés par -2 et -1. (Vérifier que si on fait une ou deux torsions sur ces noeuds on revient au noeud caractérisé par 0.) Comparer les noeuds N=2 et N=-2. Que peut on dire ?
3. Dessiner les noeuds N = 3 et N = -3.
4. Deviner comment passer d'un noeud N à son opposé.

La deuxième opération, la rotation d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre



Exercice 2

1. Que se passe-t-il si on applique 2 fois de suite une rotation à un noeud ?
2. On veut coder la rotation R par une fonction définie parmi une des formules suivantes :
   (a) $R(x) = -x$ (Montrer qu'il est impossible que $R(2) = -2$)
   (b) $R(x) = \frac{1}{x}$ (Montrer qu'il est impossible que $R(1) = 1$)
   (c) $R(x) = -\frac{1}{x}$ (Nous admettrons que cette dernière formule convient)

FIN DE LA PREMIERE SEANCE.

M.P.S : Noeuds rationnels (de Conway)-Séance 2 (2 heures)

En utilisant le fait que $R(x) = -\frac{1}{x}$ et en partant des noeuds $N = 2$, $N = 3$ et les opposés, dessiner les noeuds $N = -\frac{1}{2}$ et $N = \frac{1}{2}$ ainsi que $N = -\frac{1}{3}$ et $N = \frac{1}{3}$

Deviner la logique pour dessiner les noeuds $N = n$ avec $n \in Z$ et $N = \frac{1}{n}$ avec $n \in Z$

Exercice1 :

1. Comment obtenir les noeuds $N = \frac{2}{3}$ et $N = -\frac{2}{3}$. Dessiner ces noeuds et constater leur forme particulière en forme de coeur.
2. De même dessiner les noeuds $N = \frac{3}{4}$ et $N = -\frac{3}{4}$
3. Conjecturer le dessin général d'un noeud de type $N = \frac{n}{n+1}$

Exercice 2

1. Pourquoi suffit il d'étudier les noeuds caractérisés par un nombre rationnel q compris entre -1 et 1
2. Il s'agit d'étudier la série de noeuds $N = \frac{1}{5}$, $N = \frac{2}{5}$,$N = \frac{3}{5}$ puis $N = \frac{4}{5}$
   En fait dans cette série seuls les noeuds médians sont inconnus. Pourtant ils possèdent une propriété intéressante

   car la somme de leurs nombres vaut 1. Montrer qu'il suffit de dessiner l'un et on peut en déduire l'autre ;
3. En déduire les dessins des noeuds $N = \frac{2}{5}$ et $N = \frac{3}{5}$.

Exercice 3

1. Trouver une règle logique dans la suite :
   $\frac{1}{1+1}$ puis $\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$ puis $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}$
2. Donner un algorithme qui engendre cette suite de nombres.
3. Dessiner les noeuds correspondants aux cinq premiers termes de cette suite.
4. Voyez vous une logique apparaître ?