Lois normales

EX N°1 T suit la loi normale centrée réduite. Arrondir les résultats au millième le plus proche.

Calculer les probabilités suivantes

1. $P(1 \leqslant T \leqslant 2)$
2. $P(T \leqslant 1,45)$
3. $P(T > -0,5)$
4. $P(-2,1 < T < 0,5)$
5. $P(-2 < T < 2)$ et $P(-3 < T < 3)$

EX N°2

T suit la loi normale centrée réduite. Déterminer l'arrondi au millième le plus proche, du nombre u tel que :

1. $P(T < u) = 0,758$
2. $P(T \leqslant u) = 0,4$
3. $P(T > u) = 0,275$
4. $P(T \geqslant u) = 0,85$
5. $P(-u \leqslant T \leqslant u) = 0,90$
6. $P(-u \leqslant T \leqslant u) = 0,99$
7. $P(-u \leqslant T \leqslant u) = 0,87$

EX N°3

On aimerait prévoir la probabilité d'avoir entre 480 et 520 piles lorsqu'on lance 1000 fois une pièce équilibrée de deux manières, la première en utilisant une loi binomiale, l'autre en utilisant le théorème de De Moivre Laplace

EX N°4

X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,4$. On note m son espérance et σ son écart type

On pose $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$

1. Calculer m et σ
2. Sachant que $P(45 \leqslant X \leqslant 66) \simeq 0,853$ déterminer sans calculatrice une valeur approchée de $P(-2,5 \leqslant Y \leqslant 1)$

EX N°5

X suit une loi binomiale de paramètre n et p Démontrer que $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

EX N°6

X une variable aléatoire. Prouver que $V(aX) = a^2 V(X)$

EX N°7

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
2. Calculer f'. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$
3. En déduire le tableau de variations
4. Calculer f''. A quoi cela peut il servir de résoudre $f''(x)=0$?
5. Montrer que $f''(x)=0$ a deux solutions a et $-a$
6. Montrer que les points d'intersections des tangentes T_a et T_{-a} à la courbe C_f représentative de f en a et $-a$ avec l'axe des abscisses, ont pour abscisse 2 et -2
7. En utilisant Geogebra ou votre calculatrice faire des calculs approchés de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx$ pour $n=3$ et $n=4$. Que peut on en déduire pour $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx$?
8. (translation $x\to x-k$) Compléter $\int_{1}^{2} \mathrm{e}^{x-2}\mathrm{d}x=\int_{....}^{....} \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u$
9. En déduire que $\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} f(u)\mathrm{d}u$ pour tout $m\in\mathbb{R}$
10. (homothétie $x\to\frac{x}{k}$ avec $k\in\mathbb{R}^*$) Compléter $\int_{2}^{4}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_{....}^{....} \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u$
11. En déduire que $\int_{ka}^{kb}\frac{1}{k}f(\frac{x}{k})\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} f(u)\mathrm{d}u$, avec $k\in\mathbb{R}^*$
12. En déduire que $\int_{k(a+m)}^{k(b+m)}\frac{1}{k}f(\frac{x-m}{k})\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} f(u)\mathrm{d}u$ pour tout $k\in\mathbb{R}^*$ et m réel
13. Que peut on en déduire pour $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{k})^2}dx$?

EX N°8

T suit la loi normale centrée réduite

1. Vérifier que $E(T)=0$
2. Calculer $E(T^2)$ (intégration par parties)
3. En déduire que $\sigma(T)=1$

EX N°9

1. Vérifier que f définie par $f(t)=\frac{1}{4}1_{[8;12]}(t+10)$ est une fonction de densité de probabilité
2. Vérifier que pour tout $k>0$ la fonction h définie par $h(t)=\frac{1}{k}f(\frac{t}{k})$ est une fonction de densité de probabilité
3. Procéder de la même manière avec une fonction triangulaire

EX N°10

1. Vérifier que f définie par $f(t)=\frac{1}{4}1_{[-2;2]}(t-10)$ est une fonction de densité de probabilité

2. Vérifier que pour tout $k > 0$ la fonction h définie par $h(t) = \dfrac{1}{k} f(\dfrac{t}{k})$ est une fonction de densité de probabilité
3. Procéder de la même manière avec une fonction triangulaire

EX N°11(Théorème de De Moivre)

Soit ϕ définie sur les entiers appartenant à $[0;n]$ par $\phi(k) = \binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$

C'est la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{2}$

1. Soit $X = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)}$. Que vaut $E(X)$ et $\sigma(X)$?
2. Les valeurs de Y sont les entiers k, dans $0, 1, ...n$. Quelles sont les valeurs x de X ?Exprimer x en fonction de k et n
3. (Voir exercice 9) On construit la fonction h centrée sur 0 par $h(x) = \phi(x + \frac{n}{2})$. (Par la suite on prendra n multiple de 2)
   Puis on construit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{n} h(\sqrt{n} x)$
   Vérifier que $g(x) = \sqrt{n}\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{x\sqrt{n}+\frac{n}{2}}$
4. On cherche f définie par $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} g(x)$
   Vérifier que $\dfrac{f(x)}{f(0)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\dfrac{n}{2})!(\dfrac{n}{2})!}{(\dfrac{n}{2} + x\sqrt{n})!(\dfrac{n}{2} - x\sqrt{n})!}$
5. Puisque $n \to +\infty$ on peut poser $n = 4p^2$.
   Vérifier que $\dfrac{f(x)}{f(0)} = \lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{(2p^2)!(2p^2)!}{(2p^2 + 2px)!(2p^2 - 2px)!}$
6. Développer , simplifier et réordonner .
   Vérifier que $\dfrac{f(x)}{f(0)} = \lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{(2p^2)(2p^2 - 1)...(2p^2 - 2px + 1)}{(2p^2 + 1)(2p^2 + 2)...(2p^2 + 2px)}$
7. Vérifier que $\dfrac{f(x)}{f(0)} = \lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{(2p^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})(2p^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2})...(2p^2 + \frac{1}{2} - \frac{4px-1}{2})}{(2p^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})(2p^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})...(2p^2 + \frac{1}{2} + \frac{4px-1}{2})}$
8. Qu'est ce qui justifie que $\dfrac{f(x)}{f(0)} = \lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{(1 - \frac{1}{4p^2})(1 - \frac{3}{4p^2})...(1 - \frac{4px-1}{4p^2})}{(1 + \frac{1}{4p^2})(1 + \frac{3}{4p^2})...(1 + \frac{4px-1}{4p^2})}$
9. Qu'est ce qui justifie que
   $\ln(\dfrac{f(x)}{f(0)}) = \lim\limits_{p \to +\infty} \ln(1 - \frac{1}{4p^2}) + \ln(1 - \frac{3}{4p^2}) + ... + \ln(1 - \frac{4px-1}{4p^2}) - \ln(1 + \frac{1}{4p^2}) - \ln(1 + \frac{3}{4p^2}) - ... - \ln(1 + \frac{4px-1}{4p^2})$
10. Justifier que $\ln(\dfrac{f(x)}{f(0)}) = -2x^2$ (Utiliser $\ln(1 + x) = x + x\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$)
11. En déduire $f(x) = f(0)\mathrm{e}^{-2x^2}$
12. Vérifier que $f(0) = \lim\limits_{p \to +\infty} \sqrt{2p}\dfrac{1}{2^{2p}}\dfrac{(2p!)}{(p!)^2}$

13. En déduire en utilisant la question 6) de l'exercice 12 que $f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$

14. Pour finir on finit de réduire en faisant $n(x) = \dfrac{1}{2}f(\dfrac{x}{2})$,

    vérifier que $n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EX N°12(*)(Intégrales de Wallis)

Pour tout entier n on pose $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^n\mathrm{d}t$ et $J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^n\mathrm{d}t$

1. En procédant à une intégration par parties montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ (On pose $u' = \sin(t)$ et $v(t) = (\sin(t))^{n-1}$)
2. En déduire "par télescopage",

   pour tout p on a $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = 2^{2p}\dfrac{(p!)^2}{(2p+1)!}$
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. En déduire qu'elle est convergente
4. Montrer que la suite de terme général $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante
5. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1$. On dit que I_n équivaut à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ à l'infini . On note cela $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
6. En déduire que $\lim\limits_{p\to+\infty} \sqrt{p}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\sqrt{\pi} = 1$

EX N°13(*)(Formule de Stirling)

On veut prouver que $n! \sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ et plus précisément

$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \epsilon(\dfrac{1}{n})$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon(\dfrac{1}{n}) = 0$

On va réinvestir une méthode intéressante où on compare une suite "additive" ou série $S_n = \ln(n!) = \sum\limits_{k=1}^{k=n}\ln(k)$ à une intégrale $I = \int\limits_1^n \ln(t)\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $k \geqslant 2$ justifier que $\ln(k-1) \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k)$
2. On pose $d_k = \ln(k) - \int\limits_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t$

   A l'aide d'une intégration par parties prouver que $d_k = \int\limits_{k-1}^{k} \dfrac{t-k+1}{t}\mathrm{d}t$
3. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties prouver que

   $d_k = \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2}\int\limits_{k-1}^{k} \dfrac{(t-k+1)^2}{t^2}\mathrm{d}t$

4. Intégrer par parties $\int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$. (En posant $u'=1$ et $v=\frac{1}{t}$. Choisir comme primitive , $u=t-k+1$).

   En déduire que $d_k = \frac{1}{2}(\ln(k)-\ln(k-1)) - \frac{1}{2}\int\limits_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\mathrm{d}t$

5. A l'aide de l'expression ci-dessus vérifier que $\sum\limits_{k=2}^{n} d_k = \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=2}^{n}\int\limits_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\mathrm{d}t$

   On pose $u_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=2}^{n}\int\limits_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\mathrm{d}t$

6. Justifier que par ailleurs $\sum\limits_{k=2}^{n} d_k = S_n - I$
7. En déduire $\ln(n!) = \frac{1}{2}\ln(n) + I - u_n$
8. Calculer I et vérifier que $I = n\ln(n) - n + 1$
9. En déduire que $\ln(n!) = n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n) - n + 1 - u_n$
10. Pour finir il s'agit de prouver que la suite (u_n) converge vers un nombre l. Etudier $t \to (t-k+1)(k-t)$ sur $[k-1;k]$ en déduire que cette fonction admet un maximum et en déduire un encadrement pour $\int\limits_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\mathrm{d}t$
11. Soit (v_n) définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. En comparant (v_n) à une intégrale montrer que (v_n) converge
12. En déduire que (u_n) converge vers un nombre l. On pose $a = 1-l$. On écrit

$$\ln(n!) = n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n) - n + a + \epsilon(\frac{1}{n})$$

    avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon(\frac{1}{n}) = 0$
13. En déduire que $n! \sim cn^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$ où $c = \mathrm{e}^a$ et en utilisant la question 6) de l'exercice 12 en déduire $c = \sqrt{2\pi}$

EX N°14(*)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ et $f(0)=0$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et justifier que $f'(0)=0$
3. Montrer par récurrence que f est n fois dérivable et que $f^{(n)}(0)=0$

EX N°15

X suit la loi normale $N(30;5^2)$. On pose $T = \frac{X-30}{5}$

1. Quelle est la loi suivie par T ?
2. Déterminer a et b tel que $P(20 < X < 35) = P(a < T < b)$

3. Calculer à l'aide de la calculatrice directement $P(20 < X < 35)$ puis en passant par la loi normale centrée réduite

EX N°16

Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie . Une tige de ce type est considérée comme conforme pour la longueur lorsque celle- ci appartient à l' intervalle [99,45 ; 100,55] (en millimètres). On note L la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que L suit la loi normale de moyenne 100 et d' écart type 0, 25.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2. Déterminer le nombre réel h positif tel que $P(100 - h < L < 100 + h) = 0,95$. Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

EX N°17

On note Z la variable aléatoire qui, à une bouteille prélevée au hasard dans une livraison, associe sa contenance en centilitres. On suppose que Z suit la loi normale de moyenne 70 et d'écart type 1.

1. Calculer $P(68 < Z < 72)$
2. Déterminer le nombre réel h positif tel que $P(70 - h \leqslant Z \leqslant 70 + h) = 0,99$.

EX N°18

Une coopérative produit du beurre en microplaquettes de 12,5 g pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les microplaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40. On admet que la variable aléatoire X égale à la masse d ?une boîte de 40 microplaquettes suit alors une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1,6$ La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2 g et 503,8 g (soit environ $500 \pm 3\sigma$.

1. Calculer la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme.
2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $P(\mu - h < X < \mu + h) = 0,99$
   Calculer les poids d'alerte.

EX N°19

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. La législation impose qu'il y ait moins de $0,1\%$ de bouteilles contenant moins d'un litre. À quelle valeur de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?
2. La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
   (a) Quelle est alors la valeur de μ ?

(b) Quelle est dans les conditions de la question a) la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?

(c) Déterminer μ et σ afin qu ?il y ait moins de $0,1\%$ de bouteilles de moins d'un litre ET moins de 1% de bouteilles qui débordent.

EX N°20

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

EX N°21

Des pièces de monnaie ont un poids distribué suivant une loi normale de moyenne 10 g et d'écart-type 0.15 g. Pour les compter, on les pèse par lots d'environ un kilo. Quel est le risque de faire une erreur d'une unité ?

EX N°22

1. Calculer $\int_0^{\pi} \sin(t)\mathrm{d}t$?
2. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega t)\mathrm{d}t$ pour tout ω par changement de variable
3. Vérifier le calcul précédent par un calcul direct de l'intégrale

EX N°23

X suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$

1. Calculer $E(X^2)$ en faisant un changement de variable
2. En déduire que $\sigma(X) = \sigma$

EX N°24

En faisant le moins de calcul possible , calculer $I = \int_0^1 (t-10)^2\mathrm{d}t$?