Lois exponentielles

Vallon

18 mars 2016

Problème : J'ai acheté une ampoule.
Sur l'emballage il est écrit, 15 000 h = 15 ans sans aucune explication.
Comment interpréter cette indication ?
Quelle est la probabilité que cette ampoule ne fonctionne plus au bout d'un an ?

Modélisation

- La durée de vie d'une ampoule, en heures est une variable aléatoire $T : \Omega \to [0; +\infty[$
- Il peut paraître étonnant que T ne soit pas bornée !
- Voir le problème sur la marche aléatoire N le nombre moyen de déplacements ne l'était pas non plus !
- Comme fonction de densité pour T on cherche f telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$
- f ne peut pas être constante car $\lim\limits_{x \to +\infty} k \int_0^x \mathrm{d}t = +\infty$ pour tout $k > 0$
- Quelle fonction simple pour fonction de densité ?

- $f : t \to \dfrac{1}{t^2}$ aurait pu convenir mais alors $E(T) \to +\infty$ ce qui est absurde (exercice)
- On choisit alors $f_\lambda : t \to \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$

Définition

Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ signifie que sa densité de probabilité est définie sur $[0; +\infty[$ par $f_\lambda : t \to \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$

Théorème

Pour tout c et d appartenant à $[a; b]$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 1$
- $P(c \leqslant T \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(T \geqslant c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$
- $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Démonstration.

(Exercice) $\square$

Modélisation (suite et fin)

- On interprète 15 000 h comme la durée de vie moyenne d'une ampoule
- On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{15000}$
- A raison de 2 heures par jour donc la probabilité cherchée est $P(T \leqslant 720) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{720}{15000}} = 0,047$
- Cet évènement n'est pas "rare" , il est plus rare d'obtenir un double six en lançant deux dés $p = (\frac{1}{6})^2 = 0,027$!
- Il n'est donc pas "exceptionnel" , qu'une ampoule "prévue" durer "assez longtemps" , tombe en panne rapidement
- Il existe derrière cette indication une norme