Loi uniforme

Vallon

13 mars 2016

Problème : Pour un voyageur arrivant au hasard à la gare de Courcelle, quel est le temps d'attente moyen pour un train direction Paris ? (en admettant qu'entre 2 trains il y a en moyenne 15 minutes entre 6h 00 et 19h 00)

Modélisation

- Le temps d'attente est une variable aléatoire $T : \Omega \to [0; 15]$
- Un temps d'attente est à priori un réel
- Comment calculer une probabilité avec une variable aléatoire dont les valeurs est un intervalle ?
- En Physique si une ligne de longueur l est chargé électriquement , la charge électrique de cette ligne est $Q = \int_0^l \mathrm{d}q = \int_0^l \rho(t)\mathrm{d}t$
- ρ est la fonction densité de charge qui "décrit" la répartition de charge sur $[0; l]$
- De même la masse de cette ligne vérifie $M = \int_0^l \mathrm{d}m = \int_0^l \rho(t)\mathrm{d}t$ cette fois-ci ρ est la fonction masse linéique qui "décrit" la répartition de masse sur $[0; l]$

Définition

1. f est une fonction de densité de probabilité sur $[a; b]$ si f est continue et positive et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 1$
2. $X : \Omega \to [a; b]$ une variable aléatoire ,suit une loi de probabilité de densité f si pour tout c et d appartenant à $[a; b]$ on a
$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(t)\mathrm{d}t$$
3. L'espérance de X est définie par $E(X) = \int_a^b tf(t)\mathrm{d}t$

Théorème

Pour tout $c \in [a; b]$

- $P(X = c) = 0$
- $P(X < c) = P(X \leqslant c)$

Démonstration.

- $P(X = c) = P(c \leqslant X \leqslant c) = \int_c^c f(t)\mathrm{d}t = 0$
- $P(X \leqslant c) = P(X < c) + P(X = c) = P(X < c)$

$\square$

Définition

La densité de probabilité de la loi uniforme sur $[a; b]$ est $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$

Théorème

Pour tout c et d appartenant à $[a; b]$

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$
- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{b-a}{2}$

(Exercice)

Modélisation (suite et fin)

- On suppose que T suit une loi uniforme sur $[0; 15]$
- Donc le temps d' attente moyen pour un train en direction de Paris est $E(T) = \dfrac{15}{2} = 7$ minutes et 30 secondes !