Loi binomiale

Vallon

1er mars 2015

- Soit X une variable aléatoire $\Omega \to \{0,1\}$
- Attention ! Ω n'a pas que deux éléments, par exemple Ω peut être l'ensemble des quadruplets , l'ensemble de 4 lancers d'un dé ($6^4 = 1296$ éléments)
- On privilégie un évènement de Ω appelé Succès, noté S, par exemple les lancers contenant 6 donc $X(S) = 1$ et $X(\overline{S}) = 0$
- La loi de probabilité de X est $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$ (Loi de Bernouilli de paramètre p)
- $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

- On répète n fois la même expérience aléatoire modélisée par Ω. On note le nouvel univers Ω^n
- Par exemple on répète n fois les 4 lancers d'un dé
- On note $X : \Omega^n \rightarrow \{0, 1, 2, ..., n\}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus au cours des n répétitions
- $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où chaque $X_i : \Omega^n \rightarrow \{0, 1\}$ suit une loi de Bernouilli de paramètre p concerne le lancer numéro i
- la linéarité de l'espérance entraîne que $E(X) = np$
- Comment calculer $P(X = k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$?

- Dans Ω^n il y a $\binom{n}{k}$ paquets d'évènements élémentaires $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ ayant k succès
- Par exemple $n = 3$ et $k = 2$ il y a $\binom{3}{2} = 3$ cas : soit (1,1,0) ou (1,0,1) ou (0,0,1)
- Au lieu de calculer les probabilités dans Ω^n on va "descendre" dans chaque Ω univers d'une répétition et écrire que $P((X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0)) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)P(X_3 = 0) = P(\{\omega \in \Omega, X_1(\omega) = 1\})P(\{\omega \in \Omega, X_2(\omega) = 1\})P(\{\omega \in \Omega, X_3(\omega) = 0\}) = p \times p \times (1 - p)$ donc $P(X = 2) = 3p^2(1 - p)$
- Pour justifier ce calcul il faut définir l'indépendance de variables aléatoires, on dira simplement que l'on a répété de manière indépendante la même expérience aléatoire à 2 issues l'une de probabilité p l'évènement S et l'autre de probabilité 1-p
- Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Théorème

X une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres n et p a pour valeurs $\{0, 1, 2, ..., n\}$

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Conditions d'utilisation

- répétition d'une même expérience à 2 issues
- tirage avec remise d'un élément dans un même ensemble
- tirage sans remise mais la taille de l'ensemble est suffisamment "grande" pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise