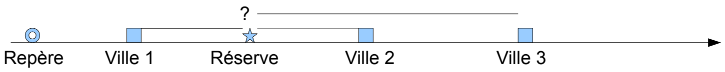
Un problème d'optimisation

Vallon

30 octobre 2014

Table :

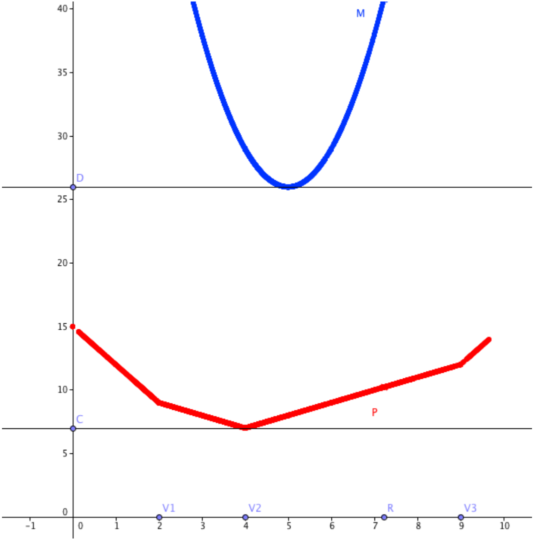


Problème :

Où disposer une réserve d'eau près d'une route rectiligne qui relie trois petites villes de telle sorte que le coût d'acheminement de l'eau de la réserve aux villes soit minimal ?

Modélisation

- On représente les villes par des points V1, V2, V3 d'abscisses x_1, x_2 et x_3 sur un axe gradué
- Pour simplifier et pouvoir calculer on va donner des valeurs simples à x_1, x_2 et x_3
- $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 9$
- On représente la réserve par un point R d'abscisse x variable
- Comment formuler le coût d'acheminement de l'eau ?



- $C(x) = RV1 + RV2 + RV3$ (linéaire)
- $C(x) = RV1^2 + RV2^2 + RV3^2$ (quadratique)

Conjectures

- Le coût linéaire est minimal si la réserve d'eau est installé en $x = x_2$
- Le coût quadratique est minimal si la réserve est installé en $x = 5$

Identités remarquables

- $\rightarrow$ Développement
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $\leftarrow$ Factorisation

- $C(x) = (x-2)^2 + (x-4)^2 + (x-9)^2$
- $C(x) = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 + x^2 - 18x + 81$
- $C(x) = 3x^2 - 30x + 101$ (forme développée)
- $C(x) = 3(x^2 - 10x + \frac{101}{3})$
- Par ailleurs $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$ donc $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$
- Donc $C(x) = 3((x-5)^2 - 25 + \frac{101}{3}) = 3((x-5)^2 - \frac{75}{3} + \frac{101}{3})$
- $C(x) = 3((x-5)^2 + \frac{26}{3}) = \underbrace{3(x-5)^2}_{>0} + 26$ (forme canonique)
- $C(x)$ est une somme de termes positifs
- Un de ces termes, variable, est le plus petit possible lorsqu'il est nul c'est à dire si $x = 5 = \dfrac{2+4+9}{3}$