EXERCICES - Schéma de Bernouilli

Ex 1

On lance n fois deux dés à six faces équilibré. Vous gagnez contre la banque du casino si aucun double six n'apparaît. Autrement dit la banque gagne si au moins un double six apparaît (avec n un entier compris entre 20 et 30)

Il s'agit de calculer la probabilité de gagner la partie pour un joueur en fonction de n de deux manières différentes, puis de trouver à partir de quelle valeur de n le jeu est favorable au casino

Première modélisation

On décrit l'univers $\Omega = (\llbracket 1;6 \rrbracket \times \llbracket 1;6 \rrbracket)^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) |\ x_i = (d_1, d_2) \text{ avec } d_i \in \llbracket 1;6 \rrbracket\}$

On note A l'évènement "faire au moins un double six" et $\overline{A}$ l'évènement contraire "ne pas faire de double six"

1. Si on lance une fois deux dés quelle est la probabilité de faire un double six ?
2. Justifier que $P(A) = 1 - (\dfrac{35}{36})^n$

Deuxième modélisation

Il s'agit de décrire mathématiquement "une succession d'épreuves indépendantes"

Comment ?

Regardons d'abord le cas où on lance deux fois les deux dés

On note S_i l'évènement obtenir un double six au i-ème lancer des deux dés pour $i = 1$ ou 2,

L'évènement S_2 pourrait être conditionné par l'évènement S_1, il est légitime de poser comme hypothèse pour simplifier le modèle que les évènements S_1 et S_2 sont **indépendants** et donc

$P_{S_1}(S_2) = P(S_2) = \dfrac{1}{36}$

1. Que vaut alors $P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2})$?
2. Et pour n lancers que vaut $P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} ... \cap \overline{S_n})$?
3. En déduire $P(A)$?

Conclusion

En utilisant un tableur déterminer la valeur de n entre 20 et 30 à partir de laquelle le jeu devient favorable au Casino

Ex 2

1. Combien de nombres à 4 chiffres (pas forcément distincts) peut on faire avec les chiffres de 1 à 9 ?
2. Combien de nombres à 4 chiffres distincts peut on faire avec les chiffres de 1 à 9 ?

Ex 3
Combien d'anagrammes a le mot OPERA ?
Ex 4
On note D_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés
Ainsi $D_3 = 0$ et $D_4 = 2$

1. En numérotant les sommets d'un polygone convexe à n côtés de 1 à n, combien y-a-t-il de façons distinctes de relier deux sommets quelconque de ce polygone ?
2. En déduire une expression de D_n en fonction de n

Ex 5
Dans un jeu de 32 cartes il y a 4 couleurs : carreau, coeur, trêfle et pique et 8 hauteurs
Une main est formée de cinq cartes

1. Combien y-a-t-il de mains différentes contenant des carrés ?
2. Combien y-a-t-il de mains différentes contenant des brelans ?
3. Combien y-a-t-il de mains différentes contenant des full ?
4. Combien y-a-t-il de mains différentes contenant deux paires ?

Ex 6
Parmi les expériences aléatoires suivantes préciser celles qui sont des **épreuves de Bernouilli** ou des **schémas de Bernouilli** :

1. On lance une pièce
2. On lance la même pièce plusieurs fois
3. On lance plusieurs pièces en même temps
4. Dans une urne il y a des boules de couleur verte, rouge et bleue. On pioche une boule et on note sa couleur
5. Dans une urne il y a des boules de couleur verte, rouge et bleue. On répète plusieurs fois l'expérience suivante : On pioche une boule on note sa couleur et on la remet dans l'urne
6. Dans une urne il y a des boules de couleur verte, rouge et bleue. On répète plusieurs fois l'expérience suivante : On pioche une boule on note sa couleur et on ne la remet pas dans l'urne

Ex 7
Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$

2. Calcul des $\binom{n}{k}$ par programmation dynamique
   $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$
   $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
   $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ pour $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$
3. $\binom{n}{k} = k\binom{n}{k-1}$ (Espérance de la loi binomiale)
4. $2^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$
5. **Formule de Newton** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Ex 7
Développer :

1. $(1+x)^4$ et $(x-1)^4$
2. $(a+b)^4$ et $(a-b)^4$

Ex 8 (BAC S 2018)
Lors d'une communication électronique, tout échange d'informations se fait par l'envoi d'une suite de 0 et de 1, appelés bits

Une suite 8 bits est appelé un octet.

On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents.

On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01

1. Justifier que la loi de probabilité $P(N = k)$ du nombre N de bits mal transmis avec $0 \leqslant k \leqslant 8$, est une loi binomiale
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux bits mal transmis ?
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante ? "La probabilité que le nombre de bits mal transmis soit inférieure ou égale à 3 est négligeable"

Ex 8 (BAC S 2013)
Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

   On envisage les événements suivants :
   — H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   — H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   — H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   — C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   — F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

(b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

(c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

(d) L'arbre choisi est un conifère.

Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On cherche la loi de probabilité du nombre de conifères de l'échantillon choisi.

(a) Justifier que c'est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?

On arrondira à 10^{-3}.

(c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?

On arrondira à 10^{-3}.