DS 3-TS5-sujet A

Ex 1 : (4 points)
Montrer que si A et B sont deux évènements indépendants alors A et $\overline{B}$ aussi
Ex 2 : (4 points)
Calculer les limites éventuelles des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$
3. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sin(x)$

Ex 3 (3 points) VRAI ou FAUX ?

1. Toute fonction non majorée sur $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$
2. On dit que deux évènements A et B sont disjoints si $A \cap B = \phi$.
   Si deux évènements non vides sont disjoints alors ils ne sont pas indépendants

Ex 4 (5 points)
On lance un dé icosaèdrique (20 faces) n fois.
Soit A l'évènement :"obtenir au moins une fois un 20"
Le but de l'exercice est de déterminer la plus petite valeur de n pour que $p(A) \geqslant 0,5$

1. Pour cette question $n = 2$
   On note E_i l'évènement "Le nombre 20 n'est pas sorti au i ème lancer" avec $i = 1$ ou 2
   Quelle hypothèse faire pour pouvoir calculer $P(E_1 \cap E_2)$?Que vaut cette probabilité ?
2. Que vaut $P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n)$? Que vaut $P(A)$?
3. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le rang n cherché (p est la probabilité $P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n)$)

```
p ← 1
n ← ....
Tant que ..........
.............
.............
Fin Tant que
........................
```

4. A l'aide de la calculatrice quelle est la valeur de n ?

Ex 5 : (4 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Montrer que la courbe représentative de f est asymptote oblique à la droite D d'équation $y = 2x + 1$
3. Préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote

corrigé Ex 1 : (4 points)
Voir cours
Ex 2 : (4 points)

1. $f(x) = x^3(1 - \frac{1}{x})$ Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3(1 - \frac{1}{x}) = +\infty$
2. $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{x^2(2 - \frac{1}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

   Donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

   Donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$
3. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$

Ex 3 (3 points) VRAI ou FAUX ?

1. Toute fonction non majorée sur $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$
   FAUX Voici un contre-exemple $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{R}$ - $\mathbb{N}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{N}$
2. On dit que deux évènements A et B sont disjoints si $A \cap B = \phi$.
   Si deux évènements non vides sont disjoints alors ils ne sont pas indépendants
   VRAI en effet $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$ Or A et B ne sont pas vides donc $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$ donc $P(A) \times P(B) > 0$ et $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$

   Ainsi pour tout évènement A non vide A et $\overline{A}$ sont **dépendants**

Ex 4 (5 points)

1. On suppose E_1 et E_2 indépendants dans ce cas $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = (\frac{19}{20})^2$
2. En généralisant $P(E_1 \cap E_2 ..... \cap E_n) = (\frac{19}{20})^n$

   Or $A = \overline{E_1 \cap E_2 ..... \cap E_n}$ donc $P(A) = 1 - (\frac{19}{20})^n$
3.
   ```
   p ← 1
   n ← 0
   Tant que p > 0.5
   n ← n+1
   p ← p*19/20
   Fin Tant que
   afficher(n)
   ```
4. A la calculatrice on obtient $n = 14$

Ex 5 : (4 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}$

1. On trouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
2. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + 1) = 0$

   Or $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{2x^3}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} = 2x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$

   Donc $f(x) - (2x + 1) = -\dfrac{1}{x^2}$ Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + 1) = 0$
3. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) - (2x + 1) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ cela signifie que la courbe de f est en-dessous de la droite D d'équation $y = 2x + 1$