DS 2-TS5-sujet A

Ex 1 : (4 points)
Montrer que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Ex 2 : (5 points)
Calculer les limites éventuelles des suites :

1. $u_n = n^2 - n + 1$
2. $u_n = (-1)^n n$
3. $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n^2 + n}$
4. $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n^2 + \sin(n)}$

Ex 3 (3 points) VRAI ou FAUX ?

1. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$
2. Si (u_n) est une suite convergente alors $v_n = \dfrac{1}{1 + (u_n)^2}$ est une suite convergente
3. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z + 2\mathrm{i}| = 4$ est un cercle

Ex 4 (3 points)
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - (\dfrac{4}{5})^n$

1. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$
2. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le rang à partir duquel $0,9999 \leqslant u_n \leqslant 1$

```
u ← ....
n ← ....
Tant que ..........
.............
.............
Fin Tant que
........................
```

Ex 5 : (5 points)

Relativement à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$
soit A, B et C les points d'affixes,$z_A = 2$, $z_B = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C = \overline{z_B}$

1. Placer les points A, B et C
2. Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $ADBC$ est un parallélogramme
3. Justifier que ABC est un triangle équilatéral

Correction sujet A
Ex 1 : (4 points)
(Voir cours)
Ex 2 : (5 points)

1. $n^2 - n + 1 = n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$
   Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc par somme $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$
   or $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc par produit $\lim_{n \to +\infty} n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = +\infty$
2. $u_n = (-1)^n n$ n'a pas de limite car :
   La sous suite des termes de rang pair $u_{2n} = (-1)^{2n}(2n) = 2n$ tend vers $+\infty$
   La sous suite des termes de rang impair $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(2n+1) = -2n-1$ tend vers $-\infty$
   Or si une suite a une limite cette limite est unique donc (u_n) n'a pas de limite
3. $\frac{n^2+1}{2n^2+n} = \frac{n^2(1 + \frac{1}{n^2}}{n^2(2 + \frac{1}{n})} = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}}$
   Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc par somme $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$
   Donc par quotient $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$
4. $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+\sin(n)} = \frac{n^2(1 + \frac{1}{n^2}}{n^2(2 + \frac{\sin(n)}{n^2})} = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{\sin(n)}{n^2}}$
   Montrons que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} = 0$
   En effet $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\sin(n)}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$
   Or $\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc d'après le Théorème des gendarmes
   $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} = 0$ et par somme $\lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{\sin(n)}{n^2} = 2$ et par quotient $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Ex 3 (3 points) VRAI ou FAUX ?

1. FAUX : Contre-exemple : $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$
   La sous suite des termes de rang pair $u_{2n} = 2n$ tend vers $+\infty$
   donc cette suite n'est pas majorée
   La sous suite des termes de rang impair $u_{2n+1} = 0$ tend vers 0
   donc cette suite n'a pas de limite à cause de l'unicité de la limite d'une suite
2. VRAI si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ alors par produit $\lim_{n \to +\infty} (u_n)^2 = l^2$ et par somme $\lim_{n \to +\infty} 1 + u_n^2 = 1 + l^2 \neq 0$ donc par quotient $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+u_n^2} = \frac{1}{1+l^2}$
3. VRAI $|z + 2\mathrm{i}| = 4 \iff |z - (-2i)| = 4 \iff AM = 4$ avec z l'affixe de M et $-2i$ l'affixe de A
   C'est donc le cercle de centre A et de rayon 4

Ex 4 (3 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - (\frac{4}{5})^n$

1. Puisque $0 < \frac{4}{5}) < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{4}{5})^n = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
2.

u ← 0 n ← 0 Tant que u < 0,9999. n ← n + 1 u ← 1 - $(\frac{4}{5})^n$ Fin Tant que afficher(n)

Ex 5 : (5 points)

Relativement à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
soit A, B et C les points d'affixes,$z_A = 2$, $z_B = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C = \overline{z_B}$

1. Faire dessin
2. On cherche l'affixe z_D du point D tel que $ADBC$ est un parallélogramme autrement dit tel que :
   $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{CB}} \iff z_D - z_A = z_B - z_C \iff z_D = z_A + z_B - z_C = 2 + 2i\sqrt{3}$
3. Montrons que $AB = AC = BC$ autrement dit $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_B - z_C|$

DS 2-TS5-sujet B

Ex 1 : (4 points)
Montrer que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :
$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
Ex 2 : (5 points)
Calculer les limites éventuelles des suites :

1. $u_n = 2n^2 - n + 1$
2. $u_n = n\sin(n)$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{2n^2+n}$
4. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+\cos(n)}$

Ex 3 (3 points) VRAI ou FAUX ?

1. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$
2. Si (u_n) est une suite convergente alors $v_n = \dfrac{1}{1-(u_n)^2}$ est une suite convergente
3. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z+2\mathrm{i}| = |z-1|$ est une droite

Ex 4 (3 points)
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - (\dfrac{3}{4})^n$

1. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$
2. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le rang à partir duquel $0,999 \leqslant u_n \leqslant 1$

```
u ← ....
n ← ....
Tant que ..........
.............
.............
Fin Tant que
........................
```

Ex 5 : (5 points)

Relativement à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
soit A, B et C les points d'affixes,$z_A = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = -2$ et $z_C = \overline{z_A}$

1. Placer les points A, B et C
2. Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme
3. Justifier que ABC est un triangle équilatéral