DS 1-TS5-sujet A

Ex 1 : (4 points)
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n! \geqslant 2^{n-1}$
Ex 2 : (6 points)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. Sur le graphique en annexe, placer les points A_0 de coordonnées $(u_0; 0)$, A_1 de coordonnées $(u_1; 0)$ et A_2 de coordonnées $(u_2; 0)$
2. Que peut-on conjecturer au sujet de (u_n) ?
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$.
   Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$
5. Donner un algorithme permettant de calculer le rang n à partir duquel $u_n \leqslant 1,01$

Ex 3 (5 points)
Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :
- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

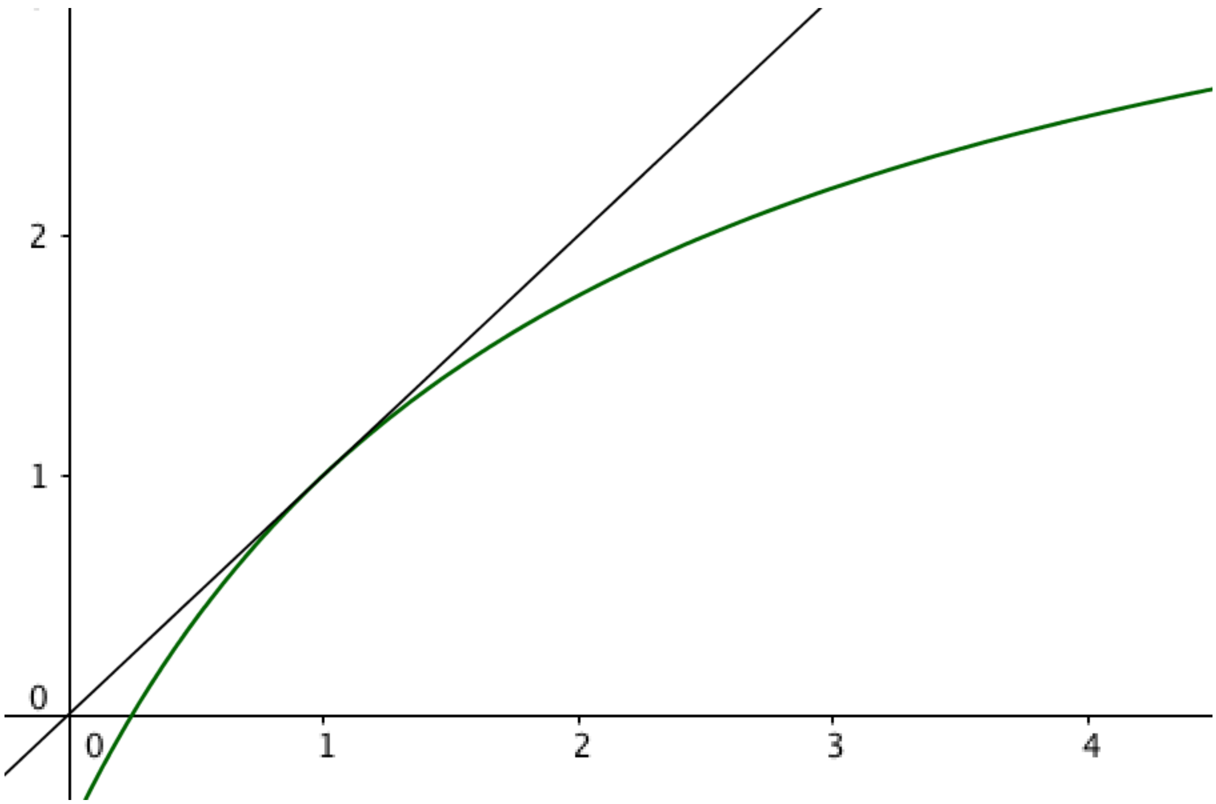
On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

Ex 4 (5 points)
On étudie deux suites (a_n) et (b_n) telle que $a_{n+1} = \dfrac{a+b_n}{2}$ et $b_n = \dfrac{b+a_n}{2}$ avec $a_0 = c$ et a, b et c des réels quelconques et tel que $2a + b \neq 0$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{4}(2a+b)$
2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
3. Conjecturer et prouver quelques propriétés au sujet de (a_n)

NOM :..



Correction du sujet A :
Ex 1 : (4 points)
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n)$ avec $P(n)$ la propriété $n! \geqslant 2^{n-1}$

1. **Initialisation :** Vrai pour $n = 1$ en effet d'une part $1! = 1$ et d'autre part $2^{1-1} = 2^0 = 1$ donc $1! \geqslant 2^{1-1}$
2. **Hérédité** : Montrons que pour tout $n \geqslant 1$ si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ aussi si $n! \geqslant 2^{n-1}$ alors en multipliant chaque membre de l'inégalité par $n+1 > 0$ on obtient
   $n! \times (n+1) \geqslant 2^{n-1} \times (n+1)$ or $n+1 \geqslant 2$
   Donc $(n+1)! \geqslant 2^{n-1} \times 2 \geqslant 2^n$
3. **Conclusion** D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$

Ex 2 : (6 points)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. Graphique
2. On conjecture que (u_n) est décroissante et minorée par 1
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$.
   f est définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ en tant que fonction homographique
   pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{4(x+2) - (4x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{9}{(x+2)^2} > 0$
   Donc la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
4. (a) **Initialisation :** Vrai pour $n = 0$ en effet $u_0 = 4$ et $u_1 = \dfrac{15}{6} > 1$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$
   (b) **Hérédité** : Montrons que pour tout $n \geqslant 0$ si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ aussi
   si $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ alors puisque f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ on obtient
   $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ c'est à dire $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
   (c) **Conclusion** D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$
5. Voici l'algorithme demandé :

```
u ← 4
n ← 0
Tant que u > 1,01
      u ← f(u)
      n ← n + 1
fin Tant que
afficher(n)
```

Ex 3 (5 points)

1. **Attention au subjonctif !** On cherche donc $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588$
2. $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$ donc $P(B \cap V) = P(V) - P(A \cap V) = 0,96 - 588 = 0,372$

   or $P_B(V) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(B)} = 0,93$

Voir plus loin page 9 la correction commune sujet A et B de l'exercice 4

DS 1-TS5-sujet B

Ex 1 (3 points)

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{R}^* \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$

Ex 2 (6 points) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 1}$$

1. Sur le graphique en annexe, placer les points A_0 de coordonnées $(u_0;0)$, A_1 de coordonnées $(u_1;0)$ et A_2 de coordonnées $(u_2;0)$
2. Que peut-on conjecturer au sujet de (u_n) ?
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$.
   Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$
5. Donner un algorithme permettant de calculer le terme de rang N de la suite (u_n)

Ex 3 (5 points)

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.

La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.

On note :

A l'évènement « le composant provient de la chaîne A »

B l'évènement « le composant provient de la chaîne B »

S l'évènement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,89$.
2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

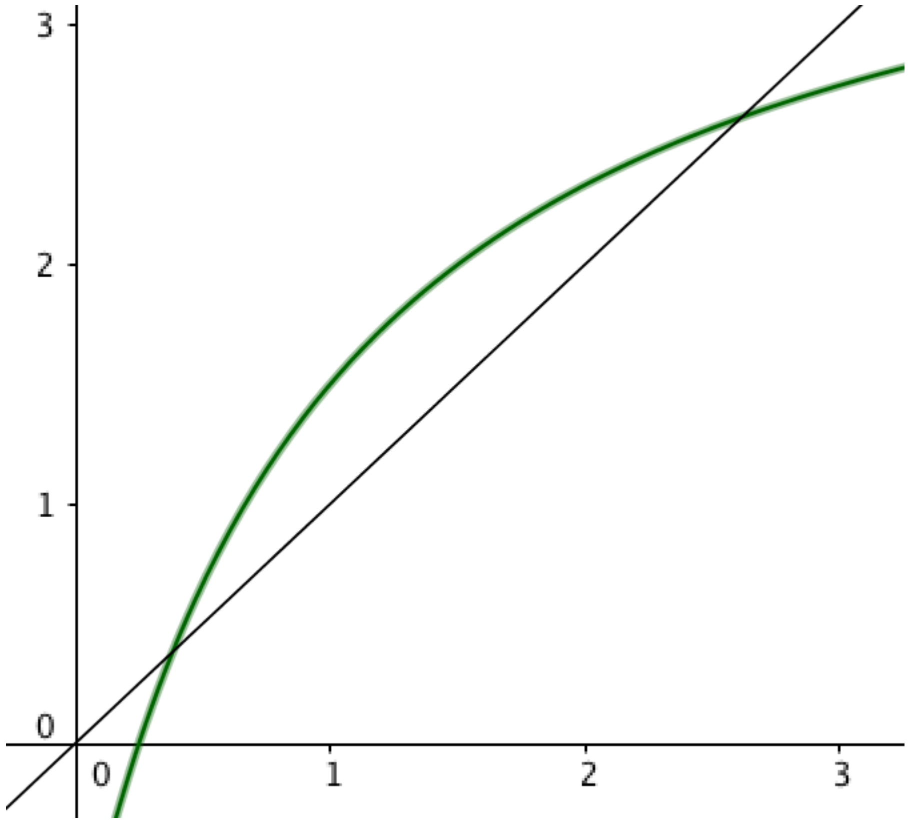
Ex 4 (5 points)

On étudie deux suites (a_n) et (b_n) telle que

$a_{n+1} = \dfrac{a+b_n}{2}$ et $b_n = \dfrac{b+a_n}{2}$ avec $a_0 = c$ et a,b et c des réels quelconques et tel que $2a+b \neq 0$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{4}(2a+b)$
2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
3. Conjecturer et prouver quelques propriétés au sujet de (a_n)

NOM :..



Correction sujet B
Ex 1 (3 points)
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall a \in \mathbb{R}^* \ \ (1+a)^n \geqslant 1+na$

1. **Initialisation :** Vrai pour $n=0$ en effet d'une part $(1+a)^0 = 1$ et d'autre part $1+0\times a = 1$ donc $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$
2. **Hérédité** : Montrons que pour tout $n \geqslant 0$ si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ aussi
si $(1+a)^n \geqslant 1+na$ alors en multipliant chaque membre de l'inégalité par $1+a>0$ on obtient
$(1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+na)\times(1+a)$ or $(1+na)\times(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$
Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$
3. **Conclusion** D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$

Ex 2 (6 points)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 1}$$

1. Graphique
2. On conjecture que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$.
f est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que fonction homographique et pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{4(x+1)-(4x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2} > 0$ donc f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
4. **Initialisation :** Vrai pour $n=0$ en effet $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{3}{2} \leqslant 3$ donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$

   Hérédité : Montrons que pour tout $n \geqslant 0$ si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ aussi
   si $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ alors puisque f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ on obtient
   $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(3) = \dfrac{11}{4} \leqslant 3$ c'est à dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$

   (b) **Conclusion** D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$
5. Voici l'algorithme demandé :

```
u ← 1
Pour i de 1 à N
    u ← f(u)
fin Pour
afficher(u)
```

Ex 3 (5 points)

1. $P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = 0,89.$
2. On cherche $P_S(A) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = 0,36$ à 10^{-2} par excès

Voir plus loin page 9 la correction commune sujet A et B de l'exercice 4

Ex 4 (5 points)

On étudie deux suites (a_n) et (b_n) telle que

$a_{n+1} = \dfrac{a+b_n}{2}$ et $b_n = \dfrac{b+a_n}{2}$ avec $a_0 = c$ et a,b et c des réels quelconques et tel que $2a+b \neq 0$

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_{n+1} = \dfrac{a + \dfrac{b+a_n}{2}}{2} = a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{4}(2a+b)$
2. (a_n) est une suite arithmético-géométrique
3. Cherchons p tel que $p = \dfrac{1}{4}p + \dfrac{1}{4}(2a+b)$ ce qui équivaut à $\dfrac{3}{4}p = \dfrac{1}{4}(2a+b)$

   Ce qui équivaut à $p = \dfrac{1}{3}(2a+b)$.

   Etudions à présent la suite $v_n = a_n - p$, c'est la suite des écarts entre a_n et p

   Montrons que v_n est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = c - p$

   $v_{n+1} = a_{n+1} - p = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{4}(2a+b) - p$

   Or $a_n = v_n + p$ donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(v_n+p) - p + \dfrac{1}{4}(2a+b) = \dfrac{1}{4}v_n - \dfrac{3}{4}p + \dfrac{1}{4}(2a+b)$

   Or $\dfrac{3}{4}p = \dfrac{1}{4}(2a+b)$ donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n$

   donc $v_n = \dfrac{1}{4^n}v_0$ et $a_n = \dfrac{1}{3}(2a+b) + \dfrac{1}{4^n}v_0$

   Or $\dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0$ et

   PAR PRODUIT $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n}v_0 = 0$ et

   PAR SOMME $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{3}(2a+b)$

   PAR SOMME (b_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{3}(a+2b)$

DS 1-TS5-sujet C

Ex 1 (3 points)
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{R}^* \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$
Ex 2 (6 points) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 1}$$

1. Sur le graphique en annexe, placer les points A_0 de coordonnées $(u_0; 0)$, A_1 de coordonnées $(u_1; 0)$ et A_2 de coordonnées $(u_2; 0)$
2. Que peut-on conjecturer au sujet de (u_n) ?
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$.
   Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$
5. Donner un algorithme permettant de calculer le terme de rang N de la suite (u_n)

Ex 3 (5 points)
Il s'agit de trouver une formule pour définir la fonction f dont la courbe représentative C_f ainsi que deux tangentes sont tracées en annexe

1. On fait l'hypothèse que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a,\ b,\ c$ et d réels. Quels éléments de la courbe représentative rendent plausible cette hypothèse ?
2. Exprimer en fonction de $a,\ b,\ c$ et d la fonction dérivée f' de f. Comment nomme-t-on une telle fonction ?
3. Lire sur le graphique les solutions x_1 et x_2 de l'équation $f'(x) = 0$. En déduire que la forme factorisée de $f'(x)$ est $f'(x) = e(x - x_1)(x - x_2)$ où e est un coefficient pour l'instant inconnu
4. Lire sur le graphique $f'(5)$. En déduire e
5. En déduire l'ensemble des primitives de f' (en fonction d'une constante C réelle)
6. Lire sur le graphique $f(0)$. En déduire C.
   En déduire que $f(x) = -0,2x^3 + 0,3x^2 + 1,2x$

Ex 4 (5 points)
On étudie deux suites (a_n) et (b_n) telle que
$a_{n+1} = \dfrac{a + b_n}{2}$ et $b_n = \dfrac{b + a_n}{2}$ avec $a_0 = c$ et a,b et c des réels quelconques et tel que $2a + b \neq 0$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{4}(2a + b)$
2. Comment nomme-t-on la suite (a_n) ?
3. Conjecturer et prouver quelques propriétés au sujet de (a_n)

NOM :..