Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs $\{.., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

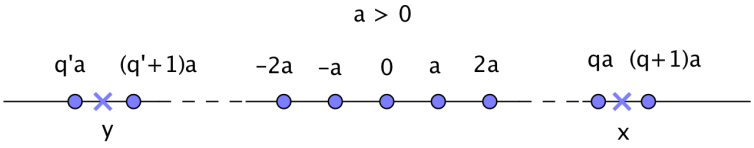
Définition : a et b deux entiers relatifs on dit que b divise a, ou a est un multiple de b (notation $b|a$) lorsqu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$

Exemple : $5|10$ car $10 = 5 \times 2$, $-5|10$ car $10 = -5 \times -2$

Exercice 1 Démontrer :

1. $\forall x \in \mathbb{Z}$, $1|x$ et $x|0$
2. $0|x \iff x = 0$
3. $a|b \iff -a|b \iff a| - b$
4. $c|a$ et $c|b$ entraîne que $c|(a + b)$ puis $c|(a - b)$ puis plus généralement toute **combinaison linéaire** $au + bv$ où u et v sont des entiers relatifs
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ si $x|y$ et $y|z$ alors $x|z$ (transitivité de la divisibilité)
6. Si $a|b$ et $b \neq 0$ alors $0 \leqslant |a| \leqslant |b|$
7. Si $a|b$ et $b|a$ alors $a = b$ ou $a = -b$

On note $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{N}$ car $2\mathbb{Z} = -2\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a



Intuitivement pour tout $a \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $a\mathbb{Z}$ forme un **réseau** de $\mathbb{Z}$, c'est à dire un sous-ensemble de points de $a\mathbb{Z}$ régulièrement espacés

Il s'agit de démontrer en exercice le théorème suivant

Théorème de la division euclidienne : $\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{N}^* \exists\ !q \in \mathbb{Z}\ \exists\ !r \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$

à partir de la propriété admise suivante

Propriété Toute partie P non vide de $\mathbb{N}$ admet un **unique** plus petit élément notée $\min(P)$

Considérer l'ensemble $E = \{a - kb \geqslant 0 | k \in \mathbb{Z}\}$. Vérifier que E est non vide (trouver un élément simple de E (pour chaque cas $a > 0$ et $a < 0$ puis utiliser la propriété ci-dessus

Algorithme d'Euclide (voir TP)

Définition $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > 2$ est dit premier si les seuls diviseurs de p sont 1 et p

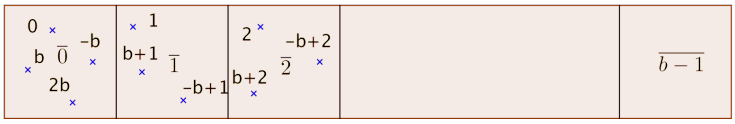
Exemples : 2,3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...97

Exercice 2 : Si p premier divise ab mais p ne divise pas a alors p divise b

Théorème 2 : Tout entier relatif se décompose de manière unique en un produit de facteurs premiers

Autrement dit : $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists p_i$ premiers uniques et α_i entiers naturels uniques tel que $a = \pm \prod_i p_i^{\alpha_i}$

(Pour l'existence faire une démonstration par récurrence sur le nombre de facteurs premiers, pour l'unicité utiliser le théorème de la division euclidienne)



Partition de $\mathbb{Z}$. Congruences dans $\mathbb{Z}$ *Avoir le même reste par la division euclidienne par b partitionne $\mathbb{Z}$, c'est à dire "découpe " $\mathbb{Z}$ en b parties infinies disjointes, autant que les restes possibles par la division par b : 0,1,2,...,$b-1$*

Définition Etant donné n un entier naturel $\geqslant 2$. On dit que a et b sont congrus modulo n si a et b ont le même reste par la division par n. On note cela $a \equiv b\ [n]$. Autrement dit a et b différent d'un multiple de n, c'est à dire il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = qn$

Exemple : $2017 \equiv 37\ [9]$, $-34 \equiv 2\ [9]$, $1171291471001 \equiv 1171291471098[97]$

Exercice 3

Prouver

1. $\forall a \in \mathbb{Z}\ a \equiv a\ [n]$ (on dit que $\equiv$ est une relation réflexive sur $\mathbb{Z}^2$)
2. $\forall a \in \mathbb{Z}$ si $a \equiv b\ [n]$ alors $b \equiv a\ [n]$ (on dit que $\equiv$ est une relation symétrique sur $\mathbb{Z}^2$)
3. $\forall a \in \mathbb{Z}$ si $a \equiv b\ [n]$ et si $b \equiv c\ [n]$ alors $a \equiv c\ [n]$ (on dit que $\equiv$ est une relation symétrique sur $\mathbb{Z}^2$)
4. On note $\overline{k} = n\mathbb{Z} + k$ pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$
   $\forall x \in \overline{k}\ x \equiv k[n]$
5. Les sous ensembles $\overline{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ forment une partition de $\mathbb{Z}$, c'est à dire $\mathbb{Z}$ est la réunion disjointe des n sous-ensembles $\overline{k}$

Exercice 4(compatibilité de $\equiv$ avec $+$ et $\times$)

Prouver que

1. si $a \equiv a'\ [n]$ et $b \equiv b'\ [n]$ alors $a + b \equiv a' + b'\ [n]$
2. si $a \equiv a'\ [n]$ et $b \equiv b'\ [n]$ alors $a \times b \equiv a' \times b'\ [n]$
3. si $a \equiv b\ [n]$ alors $a^k \equiv b^k\ [n]$ pour tout k entier
4. si $a \equiv b\ [n]$ alors $f(a) \equiv f(b)\ [n]$ où $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$

Exercice 5(Passage au quotient)

On passe de $\mathbb{Z}$ un ensemble infini à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble fini$\{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$ et on définit sur ce nouveau ensemble une addition et une multiplication grâce à l'exercice 4 ainsi

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$
2. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$

Quel intérêt ? Calculer plus vite par exemple calculons dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ le reste de la division par 97 de 1171291471001

Exercice 6 Tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

Exercice 7(Critères de divisibité 3,5,9,11 et 7 Voir Exercices)