Dérivabilité d'une fonction

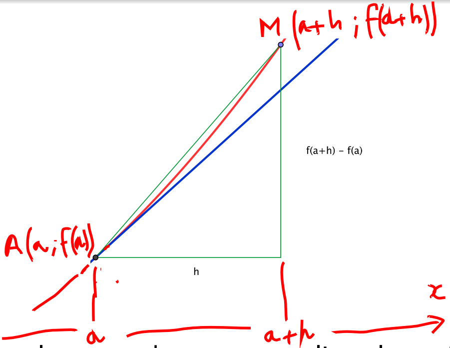
Vallon

16 novembre 2014

Définition

f une fonction définie sur un intervalle contenant le point d'abscisse $x = a$

On dit que la fonction f est dérivable en a si la quantité $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite finie lorsque h tend vers 0. On note $f'(a)$ cette limite. $f'(a)$ est le nombre dérivé de la fonction f au point a



$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est la pente du segment reliant les points $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$

Définition

Si f est dérivable en a on définit la tangente à la courbe représentative de f en a par la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$

Exemple : f définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en $x = 1$ en effet

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$$

On fait tendre h vers 0 on obtient une limite finie égale à 2 donc $f'(1) = 2$

Définition

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle J alors on dit que f est dérivable sur J. Dans ce cas on a une fonction qui à tout point de l'intervalle associe le nombre dérivé $J \ni a \to f'(a)$
f' est la fonction dérivée de f

Théorème

- *Pour tout* $n \in \mathbb{Q}^*$, $x \to x^n$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R}^*$*) et sa fonction dérivée est* $x \to nx^{n-1}$
- $x \to \sin(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa fonction dérivée est* $x \to \cos(x)$
- $x \to \cos(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa fonction dérivée est* $x \to -\sin(x)$

Théorème

f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle J

- *$f+g$ est dérivable sur J et $(f+g)' = f' + g'$*
- *$f \times g$ est dérivable sur J et $(fg)' = f'g + fg'$*
- *Si f ne s'annule pas sur J alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur J et $\boxed{(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}}$*
- *Si g ne s'annule pas sur J alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur J et $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$*

Exemples

- $(x\sin(x))' = 1\sin(x) + x\cos(x)$
- $(\frac{1}{x^2+1})' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Définition

On compose deux fonctions f et g dans cet ordre lorsqu'on applique une fonction g sur les images d'une première fonction f selon le schéma suivant : $J \ni \underline{x} \to f(x) = y \to g(y)$

rond

On a créé une nouvelle fonction $x \to g(f(x))$ notée $g \circ f$ $\quad g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple : $t \to 10t + \pi = y \to \sin(y)$ donne $t \to \sin(10t + \pi)$

Théorème

Si f est dérivable sur J et g dérivable sur un intervalle contenant $f(J)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur J et pour tout $x \in J$ on a

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

Théorème

- *Si u est dérivable sur J alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *la fonction* $\boxed{x \to u(x)^n}$ *est dérivable sur J et la fonction dérivée est* $x \to nu(x)^{n-1}u'(x)$
- *On peut étendre le théorème précédent aux exposants n négatifs à condition que u ne s'annule pas sur J* $n = \frac{1}{2}$
- *Si u est dérivable sur J et si* $u(J) \subset \mathbb{R}^{+*}$ *alors la fonction* $x \to \sqrt{u(x)}$ *est dérivable sur J et la fonction dérivée est* $x \to \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur J
Si $f' \geqslant 0$(respectivement $f' \leqslant 0$) sur J alors f est croissante (respectivement décroissante) sur J

Exemple :

- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ a pour fonction dérivée f' définie par $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ >0
- f' négative sur $\mathbb{R}^+$ et positive sur $\mathbb{R}^-$
- f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur J
Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un extremum relatif au point $a \in J$ est f' s'annule en a et change de signe

Contre-exemple : $f(x) = x^3$ s'annule en 0 et pourtant 0 n'est pas un extremum relatif de f . En effet f' ne change pas de signe en 0 !