

Coefficients binomiaux-Variable aléatoire-Loi Binomiale

EX 1

Démontrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et k entier entre 0 et n

EX 2

Démontrer par récurrence $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$

EX 3

Prouver $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ pour $0 < k \leq n$

EX 4

Un jeu utilise trois dés enfermés dans une cage. Un joueur peut parier un euro sur un numéro quelconque entre 1 et 6. La cage est secouée et le gain est réparti de la façon suivante

Si le numéro du joueur n'apparaît sur aucun des dés il perd sa mise, sinon si son numéro apparaît sur exactement k des 3 dés $k = 1, 2, 3$ il récupère sa mise et gagne k euros supplémentaires. Quelle est son espérance de gain ?

1. L'univers Ω est l'ensemble des triplets (d_1, d_2, d_3) où d_i est le résultat du dé numéro i . Combien y-a-t-il d'éléments dans Ω ?
2. Soit G la variable aléatoire égale au gain du joueur après une partie. Justifier que les valeurs de G sont -1, 1, 2 et 3 euros
3. On suppose que tous les événements élémentaires sont équiprobables. Pour déterminer la loi de probabilité de G , on va supposer que le joueur a parié sur le nombre 6
 - (a) Quelle est la probabilité d'avoir (6, 6, 6) ?
 - (b) Quelle est la probabilité d'avoir uniquement 2 six sur les 3 nombres ? (Pour dénombrer le nombre de cas favorables on raisonne ainsi : Combien y-a-t-il de façons différentes de placer 2 six sur 3 numéros ? Pour chaque façon combien y-a-t-il de triplets ?)
 - (c) Quelle est la probabilité d'avoir uniquement 1 six sur les 3 nombres ?
 - (d) Quelle est la probabilité d'avoir aucun six sur les 3 nombres ?
 - (e) Vérifier que la somme des probabilités vaut 1
4. Calculer $E(G)$
5. On dira que ce jeu est équitable si $E(G) = 0$. Comment comprenez vous cette définition ? Le jeu est -il équitable ?

EX 5

Soit X une variable aléatoire finie

1. Montrer que $E((X - E(X))) = 0$
2. Montrer que $E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

EX 6

1. Redémontrer la loi de probabilité d'une loi binomiale
2. Démontrer que l'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p vaut np (utiliser l'ex 3)