Expressions booléennes

Une expression booléenne (vient de **George Boole**, mathématicien britannique du XIX ^{e} siècle) est une expression pouvant être vraie ou fausse mais pas les deux.
Par exemple l'expression $1 < 2$ est évaluée à vraie (True) dans l'interpréteur Python alors que $1 > 2$ est évaluée à fausse (False).
Dans la suite, pour des raisons de simplicité on associe la valeur 1 à la valeur Vraie

```
>>> 1 < 2
True
>>> 1 > 2
False
```

(True) et la valeur 0 à la valeur Faux (false).
Les **tests** ou **conditions d'arrêt pour la boucle while** sont des expressions boo-

```
>>> type(1)
<class 'int'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
>>> 1 == True
True
>>> 0 == False
True
```

léennes parfois complexes car composées d'autres expressions booléennes reliées entre elles par des **opérateurs booléens** ou **connecteurs booléens**. Un **opérateur booléen** permet de connecter deux expressions booléennes pour former une nouvelle expression booléenne.
Nous utiliserons principalement les opérateurs **et**, **ou** puis **non**.
Voici la table de vérité de l'opérateur **et** :

a	b	a et b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On retiendra que **a et b n'est vrai que lorsque a et b sont vrais** de ce fait le langage Python n'évalue pas l'expression b si a est fausse. (On parle de "paresse" des connecteurs booléens).

Voici la table de vérité de l'opérateur **ou** :

a	b	a ou b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On retiendra que **a ou b n'est faux que lorsque a et b sont faux** de ce fait le langage Python n'évalue pas l'expression b si a est vraie.

Voici la table de vérité de l'opérateur **non**

a	non a
0	1
1	0

On verra en exercices qu'il existe 16 connecteurs logiques pour deux expressions booléennes et que tous ces connecteurs s'expriment en fonction des connecteurs `non`, `et`, `ou`
Ces connecteurs apparaissent donc comme des connecteurs fondamentaux

Exemple d'application

Problème On dispose d'un ensemble de nombres **dans lequel** peut se trouver plusieurs fois le nombre 0

On veut compter le nombre de fois où $x > \frac{1}{x}$ (évidemment pour x est différent de 0)

une façon de faire est :

```
nb = 0
#pour chaque nombre x de l'ensemble faire
if x != 0:
    if x > 1/x:
        nb += 1
```

Une autre façon de faire est de laisser Python évaluer l'expression booléenne

`x != 0 and x > 1/x`

de telle sorte que si le premier terme `x != 0` est évalué à faux dans ce cas `x > 1/x` n'est pas évalué et il n'y a pas de division par zéro !

```
nb = 0
#pour chaque nombre x de l'ensemble faire
if x != 0 and x > 1/x:
        nb += 1
```

Exercices

Ex 1

1. Combien de connecteurs logiques à 2 places ?
2. Combien de connecteurs logiques à 3 places ?
3. Combien de connecteurs logiques à n places ?

Ex 2

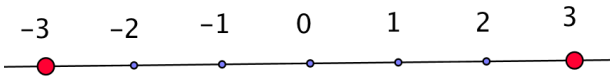
1. Montrer que `non(a et b)` a la même table de vérité que `non(a) ou non(b)`
2. En déduire que le connecteur logique `et` s'exprime en fonction des connecteurs `non` et `ou`
3. Montrer que `non(a ou b)` a la même table de vérité que `non(a) et non(b)`
4. Montrer que le connecteur logique `ou` s'exprime en fonction des connecteurs `non` et `et`

Ex 3

Un opérateur logique très utilisé est le ou exclusif ou xor (en anglais) défini comme le `ou` à la différence que `xor(1,1) = 0`
Montrer que `xor(a,b)` a la même table de vérité que `(non(a) et b) ou (a et non(b))`

Ex 4

Un jeton part de l'origine et se déplace aléatoirement ainsi : Si le lancer d'une pièce a donné **Pile** alors le jeton se déplace d'une unité vers la droite sinon il se déplace d'une unité vers la gauche et le déplacement s'arrête lorsque l'abscisse du jeton est 3 ou -3. Il s'agit de compter le nombre moyen de lancers de la pièce par déplacement
Compléter l'algorithme suivant



Algorithme 1 : Déplacement du jeton

Données : Un jeton à l'origine, un intervalle gradué [-3 ;3] et un générateur de nombres aléatoires
Résultat : Le nombre de lancers de la pièce

```
1 début
2 |  position ← 0
3 |  nbLancers ← 0
4 |  tant que ..... faire
5 |  |  piece ← entierAleatoire(0,1)
6 |  |  .....
7 |  fin
8 |  afficher(nbLancers)
9 fin
```