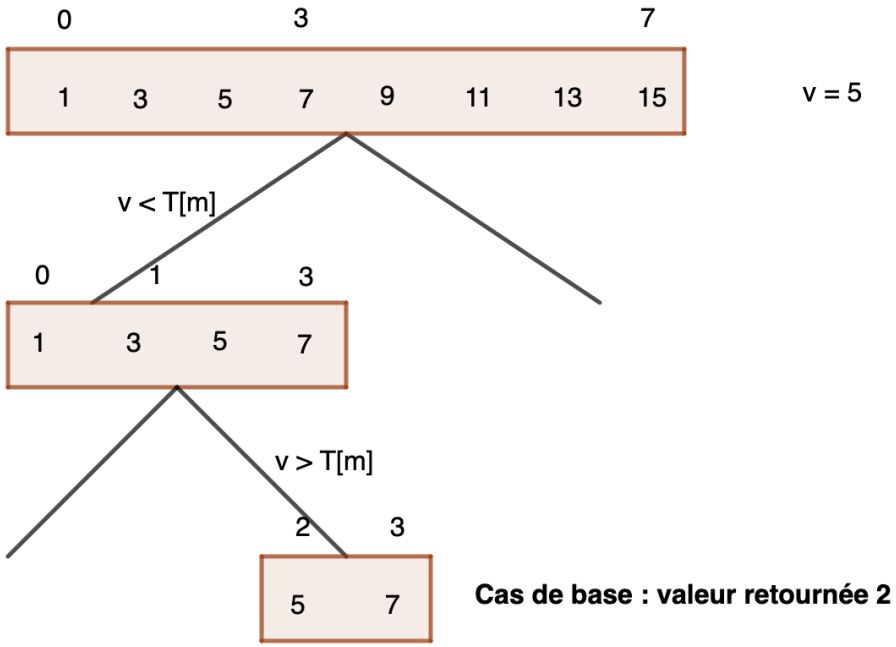
## Arbres

Nous avons vu dans le cours diviser pour régner que la **recherche dichotomique** était plus efficace que la **recherche séquentielle**.

La recherche séquentielle est associée à une structure linéaire alors que la recherche dichotomique est associée à une structure d'**arbre binaire**

par exemple si on recherche la valeur 5 dans la liste ci-dessous la succession des tests introduit un arbre binaire

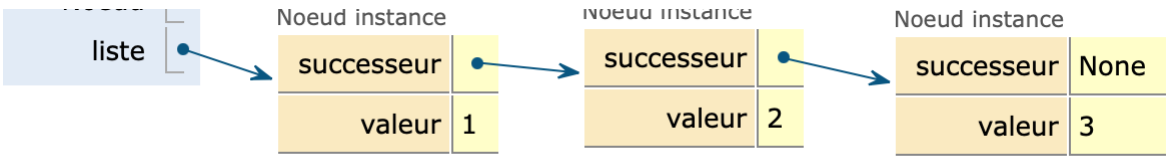



# 1 Arbres binaires

Avec Python Tutor on visualise une liste chaînée définie par

```
class Noeud:
    def __init__(self,v,s):
        self.valeur = v
        self.successeur = s

liste = Noeud(1,Noeud(2,Noeud(3,None)))
```

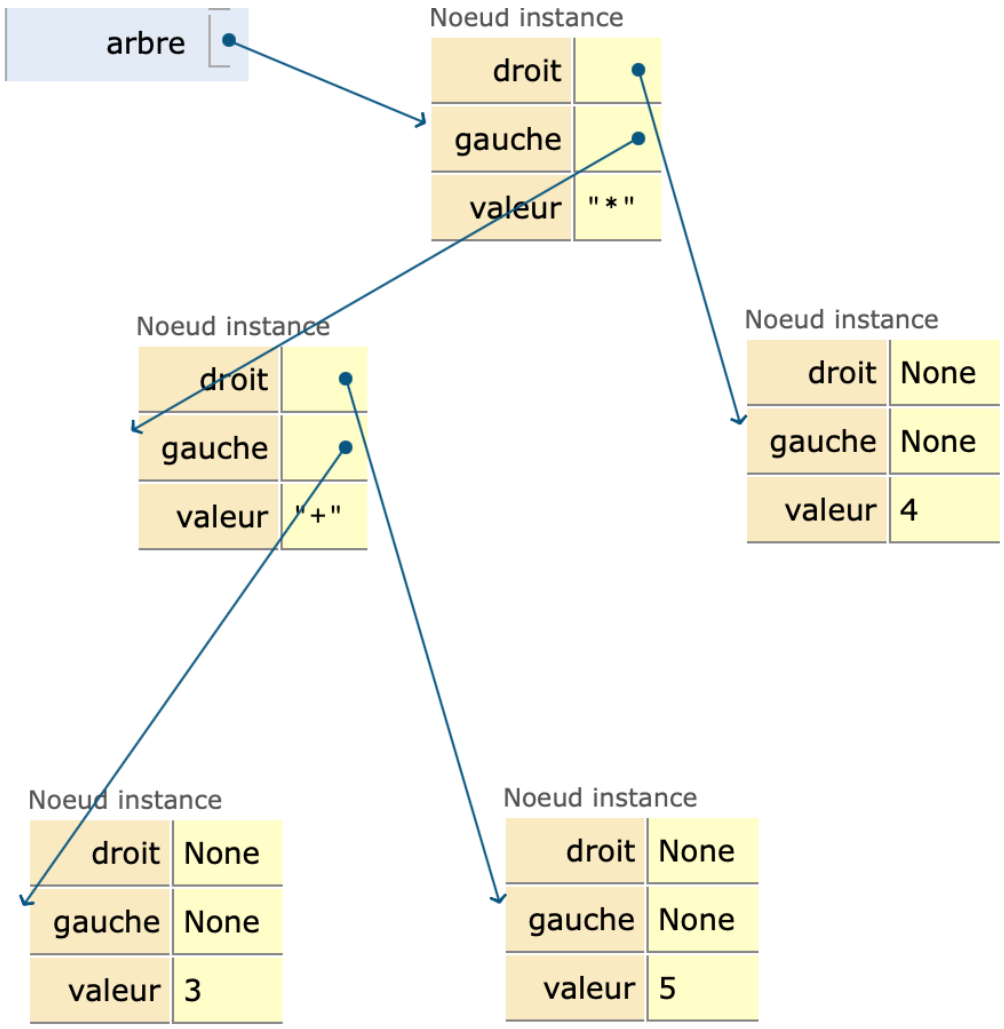



A la place d'un seul attribut `successeur` on met deux successeurs `droit` et `gauche`, plus précisément on définit ainsi un arbre binaire par exemple pour représenter l'expression arithmétique

$(3+5)*4$

```
class Noeud:
    def __init__(self,v,g,d):
        self.valeur = v
        self.gauche = g
        self.droit = d

arbre = Noeud('*',Noeud('+',Noeud(3,None,None),
Noeud(5,None,None)),Noeud(4,None,None))
```




## Vocabulaire

1. Un arbre est vide s'il ne contient aucun noeud, autrement dit en Python

   ```
   def est_vide(arbre):
       return arbre is None
   ```

2. La **racine** de l'arbre est le noeud sur lequel pointe la variable `arbre`

   Dans l'exemple ci-dessus le noeud dont la valeur est '*' est la racine de l'arbre

3. Le `sous arbre gauche` d'un noeud est référencé par l'attribut `gauche` de ce noeud (idem pour le sous arbre droit)

4. Une `feuille` est un noeud dont les sous-arbres droit et gauche sont vides

   Dans l'exemple ci-dessus les feuilles sont les noeuds dont les valeurs sont 3, 5 et 4

5. La `taille` d'un arbre est le nombre de noeuds de l'arbre, dans l'exemple ci-dessus la `taille` vaut 5

   La taille se définit naturellement de manière **récursive** ainsi :

```
def taille(arbre):
    #le cas de base est une feuille
    if arbre is None :
            return 1
    return 1 + taille(arbre.gauche) + \
    taille(arbre.droit)
```

6. La racine d'un arbre binaire a au plus deux successeurs (on dit aussi enfants ou fils) qui eux même peuvent avoir au plus deux fils

   A la **deuxième génération** ou au **deuxième niveau** on a donc au plus $1 + 2 + 2^2 = 2^3 - 1$ noeuds

   A la $n$ ième génération on a donc au plus $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ noeuds

   Lorsque le nombre maximal de noeuds est atteint on dit que l'arbre binaire est **complet**

7. La `hauteur` d'un arbre est défini **récursivement** ainsi

   (a) La hauteur d'un arbre vide est 0

   (b) La hauteur d'un arbre non vide est la plus grande hauteur entre le sous arbre gauche et le sous arbre droit plus 1

```
def hauteur(arbre):
    #le cas de base est une feuille
    if arbre is None :
        return 0
    return 1+ max(hauteur(arbre.gauche) ,
    hauteur(arbre.droit)
```

Dans l'exemple ci-dessus la hauteur vaut 3

On a la relation suivante entre la hauteur et la taille d'un arbre binaire

$2^{h-1} \leqslant t \leqslant 2^h$

Donc $h - 1 \leqslant \ln_2(t) \leqslant h$

Autrement dit $\mathrm{E}(\ln_2(t)) \leqslant h$

8. Un arbre est dit **dégénéré** si tous les noeuds ont au plus un successeur

   la taille d'un tel arbre est égale à sa hauteur

   Donc pour tout arbre binaire $h \leqslant t$

   On a donc $\mathrm{E}(\ln_2(t)) \leqslant h \leqslant t$

## 2 Parcours d'arbres binaires

La structure linéaire d'une liste impose deux parcours naturels, soit on parcourt la liste du début à la fin, soit de la fin au début

Qu'en est il pour un arbre binaire ? Les principaux parcours sont :

1. **Le parcours infixe** : Récursivement dans l'ordre :
   (a) On parcourt le sous-arbre gauche
   (b) On traite la racine (affichage par exemple)

(c) On parcourt le sous-arbre droit

Ce qui donne pour notre exemple, l'arbre qui représente l'expression arithmétique $(3 + 5) * 4$ :

3 + 5 * 4

d'où la fonction récursive suivante

**Algorithme 1 :** Parcours infixe d'un arbre

```
parcours_infixe (A)
début
    Données : Un arbre A
    Résultat : Rien
1   si non (A est vide) alors
2       parcours_infixe (A.gauche)
3       afficher valeur(A)
4       parcours_infixe (A.droit)
5   fin
fin
```

traduit en Python

```
def parcours_infixe(arbre):
    """
     si arbre est vide on ne fait rien
    """
    if arbre is not None:
        parcours_infixe(arbre.gauche)
        print(arbre.valeur)
        parcours_infixe(arbre.droit)
```

Regardons la pile des appels

**Remarque**

On aurait pu commencer par le sous-arbre droit.

Il existe une sorte de convention qui fait commencer par le sous arbre gauche

2. **Le parcours préfixe**

   Récursivement dans l'ordre :

   (a) On traite la racine (affichage par exemple)

   (b) On parcourt le sous-arbre gauche

   (c) On parcourt le sous-arbre droit

   puis le sous arbre droit

   Ce qui donne pour notre exemple :

   * + 3 5 4

3. **Le parcours postfixe**

   Récursivement dans l'ordre :

   (a) On parcourt le sous-arbre gauche

   (b) On parcourt le sous-arbre droit

   (c) On traite la racine (affichage par exemple)

   puis le sous arbre droit

   Ce qui donne pour notre exemple :

   3 5 + 4 *

   (On retrouve la notation **postfixée** vue en TP pour l'utilisation d'une pile pour l'évaluation d'une expression arithmétique)

4. **Le parcours en largeur, parcours en profondeur**

   En Première nous avons vu l'algorithme de Dijkstra comme exemple d'application de la **stratégie gloutonne**, nous allons revoir cette année cet algorithme mais cette fois ci comme un parcours en largeur dans un graphe

   Qu'est ce qu'un parcours en largeur dans un arbre ?

   On visite les noeuds **niveau par niveau** en commençant par la racine et de la gauche vers la droite

   Dans notre exemple cela donne

(a) On visite la racine '*'

(b) puis au premier niveau de la gauche vers la droite '+' puis 4

(c) puis au deuxième niveau 3 puis 5

D'un point de vue algorithmique on se sert d'une **file** pour enregistrer les noeuds d'un même niveau les uns à la suite des autres tous ensemble

Lors du défilement ils seront traités dans le même ordre où ils ont été enregistrés

**Algorithme 2 :** Parcours en largeur d'un arbre

```
parcours_largeur (A)
début
    Données : Un arbre A
    Résultat : Rien
1   f = file_vide()
2   enfiler(f,A)
3   tant que non (est-vide(f)) faire
4       x = defiler(f)
5       afficher(x.valeur)
6       si non x.gauche est vide alors
7           enfiler(f,x.gauche)
8       fin
9       si non x.droit est vide alors
10          enfiler(f,x.droit)
11      fin
12  fin
fin
```

Traduit en Python :

```
def parcours_largeur(arbre):
    """
     arbre est non vide
    """
    f = file_vide()
    enfiler(f,arbre)
    while not est_vide(f):
        x = defiler(f)
        print(x.valeur)
        if x.gauche is not None:
            enfiler(f,x.gauche)
        if x.droit is not None:
            enfiler(f,x.droit)
```

Que se passe-t-il si au lieu d'une file on utilise une pile ?

Quel type de parcours a-t-on avec la fonction suivante ?

```
def parcours_surprise(arbre):
    """
     arbre est non vide
    """
    p = pile_vide()
    empiler(p,arbre)
    while not est_vide(p):
        x = depiler(p)
        print(x.valeur)
        if x.droit is not None:
            empiler(p,x.droit)
        if x.gauche is not None:
            empiler(p,x.gauche)
```

A l'affichage on obtient :

* + 3 5 4

On retrouve le parcours préfixe

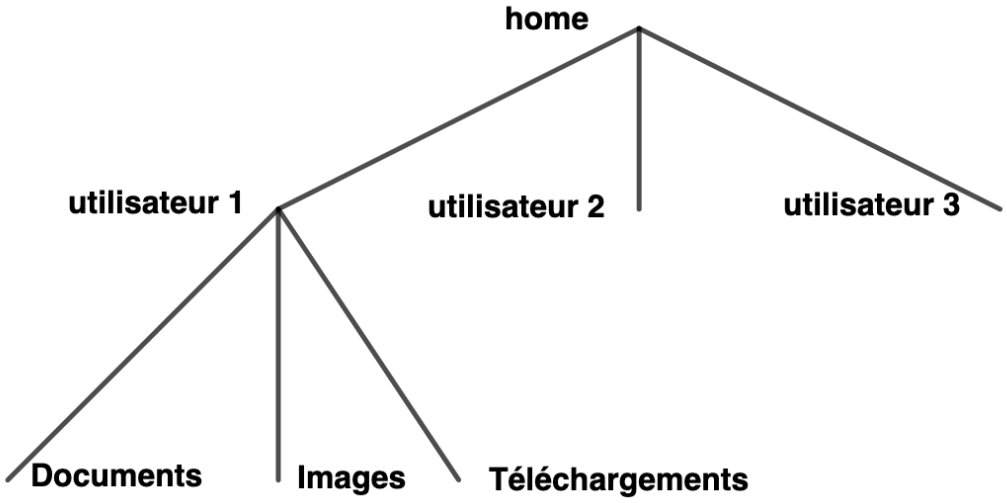
On parle aussi de **parcours en profondeur** car on essaie d'atteindre une feuille dès que c'est possible puis on remonte et on recommence

## 3 Arbres

On a déjà rencontré des arbres où un noeud peut avoir plus de deux successeurs et **il n'y a pas d'ordre entre les successeurs**

Par exemple :

1. L'arbre d'organisation des répertoires et des fichiers par un système d'exploitation, par exemple




2. Une page web est **structurée** par le langage HTML qui est un langage de balises

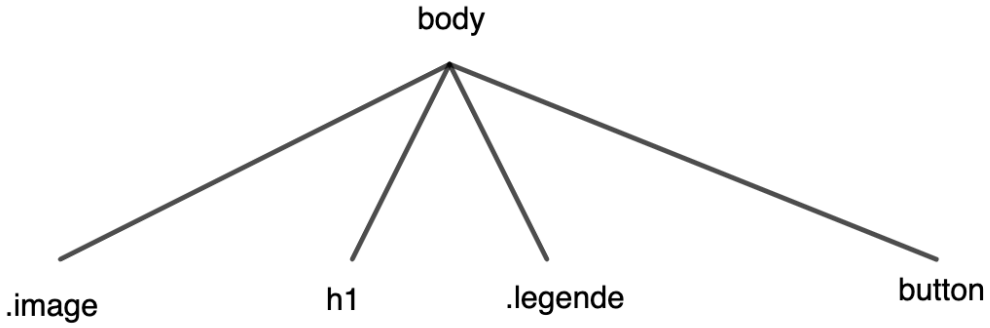
   La plupart des balises sont ouvrantes et fermantes ce qui induit une relation hiérarchique entre les balises , que l'on peut matérialiser par un arbre appelé le DOM (document object model)

Voici la partie visible d'une page "simple" , entre les balises <body> et </body>

```
<body>
 <img class = 'image' width="450" align = "middle" src="chat.png"/>

 <h1>Légende</h1>
 <p class='legende'>Image d'un chat</p>
 <button>Changer</button>
</body>
```

et voici le dom associé



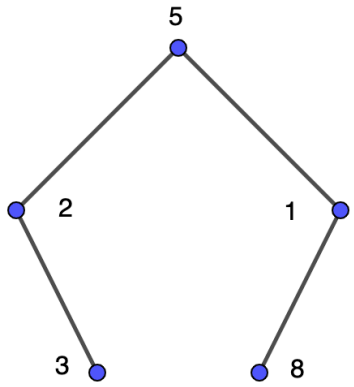

# 4 Exercices

## Ex 1

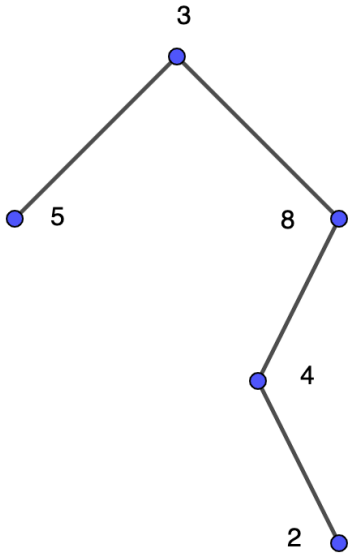
1. Dessiner l'arbre suite à l'exécution de

```
arbre = Noeud(1,Noeud(2,None,Noeud(3,None,None)),
None)
```

Quelle est l'instruction correspondante à l'arbre représenté ci-dessous




3. Quelle est l'instruction correspondante à l'arbre représenté ci-dessous




**Ex 2**

Implémenter la fonction `afficher(a)` permettant d'afficher un arbre binaire a sous la forme suivante :

(SAG Noeud SAD) où SAG est le sous arbre gauche du Noeud et SAD est le sous arbre droit

Par exemple l'arbre de l'expression arithmétique du cours sera affiché :

(((3)+(5))*(4))

**Ex 3**

Implémenter une fonction `parcours_postfixe(a)` qui affiche les éléments de l'arbre a dans un parcours postfixe

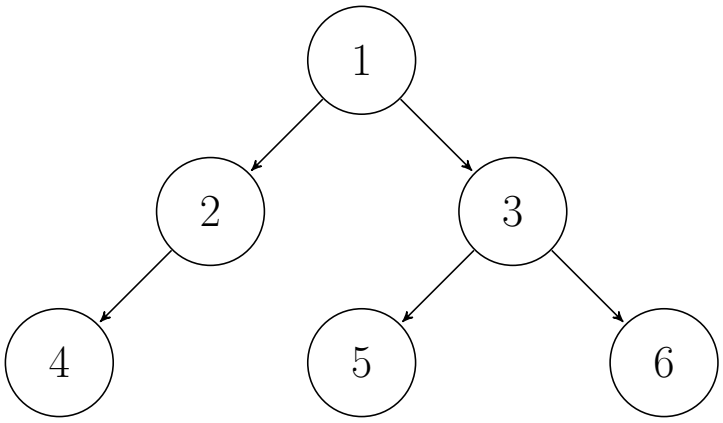
**Ex 4**

1. Dénombrer tous les arbres binaires de taille égale à 2
2. Dénombrer tous les arbres binaires de taille égale à 3
3. Dénombrer tous les arbres binaires de taille égale à 4
4. **Conjecturer** une formule permettant de dénombrer le nombre d'arbres binaires de taille $n$

**Ex 5**

Qu'observe-t-on à l'affichage pour un parcours de l'arbre suivant ?

1. prefixe
2. infixe
3. postfixe
4. en largeur




**BAC** Ex 4 Amérique du Nord 2021