# Probabilités conditionnelles

Vallon

1er septembre 2015

# Capacités attendues

- Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée
- Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

- Il y a deux terminales S dans un lycée
- La TS1 a 33 élèves
- La TS2 a 31 élèves
- Calculons la fréquence des élèves suivant l'enseignement d'informatique $f(I)$ parmi l'ensemble des élèves de S
- $f(I) = \dfrac{9}{64} = 0,140$ à $10^{-3}$ près que l'on traduit par 14%

- Calculons à présent la fréquence des élèves suivant l'enseignement d'informatique en TS1
- $f_{S1}(I) = \dfrac{2}{33} = 0,060$ à $10^{-3}$ près que l'on traduit par 6%
- Calculons à présent la fréquence des élèves suivant l'enseignement d'informatique en TS2
- $f_{S2}(I) = \dfrac{7}{31} = 0,225$ à $10^{-3}$ près que l'on traduit par 23%

- Calculons la fréquence des élèves de TS1 par rapport aux deux terminales S
- $f(S1) = \dfrac{33}{64} = 0,515$ à $10^{-3}$ près que l'on traduit par 52%
- Calculons la fréquence des élèves de TS2 par rapport aux deux terminales S
- $f(S2) = \dfrac{31}{64} = 0,484$ à $10^{-3}$ près que l'on traduit par 48%

- Comment passer des fréquences calculées sur l'ensemble des 2 classes aux fréquences calculées sur une seule classe ?
- $\dfrac{2}{33} = \dfrac{\frac{2}{64}}{\frac{33}{64}}$
- C'est quoi $\dfrac{2}{64}$ ?
- C'est la fréquence des élèves faisant de l'informatique et se trouvant en TS1 sur l'ensemble des deux terminales
- $f_{S1}(I) = \dfrac{f(I \cap S1)}{f(S1)}$ ce qui équivaut à $f(I \cap S1) = f_{S1}(I) \times f(S1)$
- $I = (I \cap S1) \cup (I \cap S2)$ (union disjointe)
- Donc $f(I) = f(I \cap S1) + f(I \cap S2)$

On considère l'expérience aléatoire suivante : choisir au hasard un élève dans l' univers $\Omega$ l'ensemble des élèves des deux classes de terminale S
On considère les évènements suivants

- $S1$ : "L'élève est en S1"
- $\bar{S}1$ : "l'élève n'est pas en S1"
- $I$ :"l'élève fait de l'informatique en spécialité"

On définit une loi de probabilité $P$ en supposant que tous les élèves ont la même chance d'être choisis

- $P(S1) = \dfrac{33}{64} = 0,515$ à $10^{-3}$ près
- $P(S2) = \dfrac{31}{64} = 0,484$ à $10^{-3}$ près
- $P(I) = \dfrac{9}{64} = 0,140$ à $10^{-3}$ près

Par analogie avec les fréquences conditionnelles on définit :

## Définition

Etant donné une loi de probabilité $P$ relativement à un univers $\Omega$,et un évènement $C$ inclus dans $\Omega$, on définit une loi de probabilité conditionnelle à l'évènement $C$ par

$$P_C(X) = \frac{P(X \cap C)}{P(C)}$$

où $X$ est un évènement inclus dans $\Omega$
$P_C(X)$ se lit "P de X sachant C"

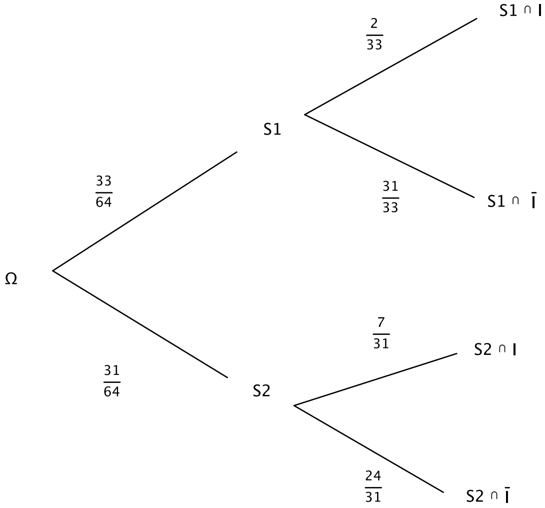
Exemple :

- $P_{S1}(I) = \dfrac{2}{33}$ directement
- $P_{S1}(I) = \dfrac{P(S1 \cap I)}{P(S1)} = \dfrac{\frac{2}{64}}{\frac{33}{64}}$ (Ou en passant par $P$ )

### Définition

Deux évènements $A$ et $B$ forment une partition de l' univers si $A \cup B = \Omega$

- Pour tout évènement $X$ on a $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$ (union disjointe)
- $P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B)$
- $P(X) = P(A) \times P_A(X) + P(B) \times P_B(X)$ (formules des probablités totales)
- $P(I) = P(S1) \times P_{S1}(I) + P(S2) \times P_{S2}(I)$ (formules des probablités totales)


$\Omega$
$\frac{33}{64}$
$\frac{31}{64}$
S1
S2
$\frac{2}{33}$
$\frac{31}{33}$
$\frac{7}{31}$
$\frac{24}{31}$
$S1 \cap I$
$S1 \cap \bar{I}$
$S2 \cap I$
$S2 \cap \bar{I}$

Problème : On choisit un élève au hasard parmi les élèves de TS. On sait qu'il fait de l'informatique. Quelle est la probabilité qu'il vienne de S1 ?
On cherche $P_I(S1)$

- Ici c'est facile on a le résultat directement $P_I(S1) = \dfrac{2}{9}$
- $P_I(S1) = \dfrac{P(I \cap S1)}{P(I)} = \dfrac{P_{S1}(I) \times P(S1)}{P(S1) \times P_{S1}(I) + P(S2) \times P_{S2}(I)} = \dfrac{\frac{2}{64}}{\frac{9}{64}}$
- Donc $P_I(S1) = \dfrac{2}{9}$