**Exercice 1**

$a, b, d \in Z$ avec $d \neq 0$ Montrer que $a|b \iff da|db$

**Exercice 2**

Pour tout $a$ et $b$ relatifs suivants déterminer $q$ et $r$ tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$

1. $a = 153$ et $b = 31$
2. $a = -153$ et $b = 31$
3. Comment étendre la définition de la division euclidienne pour $b < 0$ ?

**Exercice 3**

Calculer $\lfloor 1,5 \rfloor$, $\lceil 1,5 \rceil$, $\lfloor -1,5 \rfloor$, $\lceil -1,5 \rceil$

**Exercice 4**

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel $x$ tel que $x \geqslant 1$ le nombre de multiples de $m$ dans l'intervalle $[1, x]$ est $\lfloor x/m \rfloor$ ; Cas particulier : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ le nombre de multiples de $m$ parmi 1,...,n est $\lfloor x/m \rfloor$.

**Exercice 5**

Soit $\cup E_i$ une partition (finie) d'un ensemble $E$ montrer que la relation $R$ définie sur $E^2$ par :

$xRy \iff \exists i, x, y \in E_i$ est une relation d'équivalence

**Exercice 6**

Pour le code INSEE justifier que $K + R$ est un multiple de 97

**Exercice 7**

Soit $n \in \mathbb{N}$ son écriture décimale est $n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} a_i 10^i$

1. Montrer que la somme des chiffres de $n$ est congru modulo 9 au reste de la division par 9 de $n$
2. En remarquant que $10 \equiv 1[3]$ énoncer une règle de divisibilité par 3 d'un entier $n$
3. En remarquant que $10 \equiv 1[9]$ énoncer une règle de divisibilité par 9 d'un entier $n$
4. En remarquant que $10 \equiv -1[11]$ en déduire que $10^{2k} \equiv 1[11]$ et $10^{2k+1} \equiv -1[11]$ puis en déduire une règle de divisibilité par 11 d'un entier $n$ en utilisant les notations suivantes :

   On note $S_{2k}$ la somme des chiffres de rang pair de $n$ et $S_{2k+1}$ la somme des chiffres de rang pair de $n$

**Exercice 7,5**

Si $a \equiv b\ [n]$ et $m|n$ avec $m > 0$ alors $a \equiv b\ [m]$

A-t-on $a \equiv b\ [n]$ si $a \equiv b\ [m]$ et $m|n$ ?

**Exercice 8 (BAC)**

1. Démontrer pour tout entier naturel $n$ on $2^{3n} \equiv 1[7]$
2. En déduire que $2^{33} - 1$ est divisible par 7. (Une autre façon de faire est de considérer que $x^{11} - 1 = (x-1)(x^{10} + x^9 + .... + x^2 + x + 1)$ )
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2018^{2019}$ par 7

**Exercice 9 (BAC)**

*Vrai ou faux ?* Pour tout entier naturel $n$, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4

**Exercice 10**

On définit par récurrence la suite de Sylvester par $s_1 = 3$ et $s_n = s_{n-1}(s_{n-1} - 1) + 1$

1. Calculer $s_2$, $s_3$ et $s_4$
2. On note $l_n$ la suite étant égale au nombre de chiffres de $s_n$ que peut on conjecturer à propos de $l_n$
3. Ecrire un algorithme puis un programme Python pour calculer le nième terme de cette suite
4. Démontrer par récurrence : $\forall n \geqslant 2$ on a $s_n \equiv 7[9]$

**Exercice 11**

1. Vérifier que $3\pi \equiv \pi[2\pi]$
2. La mesure principale d'un angle en radians est comprise entre $-\pi$ et $\pi$. Calculer la mesure principale de $\dfrac{2017\pi}{3}$

**Exercice 12**

1. $a$ entier $\geqslant 2$ et $m$ et $n$ deux entiers $\geqslant 1$ montrer que $m|n \iff a^m - 1|a^n - 1$
2. Montrer que $2^{2018} - 1$ est divisible par 3
3. Prouver le résultat précédent avec les congruences modulo 3
4. Montrer que si $n$ n'est pas premier alors $2^n - 1$ non plus

**Exercice 13**

1. Prouver que pour tout $n$ entier $a - b|a^n - b^n$
2. Prouver que pour tout $n$ impair $a + b|a^n + b^n$
3. Montrer que $2^{2017} + 1$ est un multiple de 3
4. Prouver le résultat précédent avec les congruences modulo 3
5. prouver que si $n$ a un diviseur impair alors $2^n + 1$ n'est pas premier

**Exercice 14**

**Jeu de Nim**

40 allumettes sont disposés sur la table. Deux joueurs prennent chacun à tour de rôle une, deux, trois ou quatre allumettes. Celui qui prend la dernière allumette perd la partie.

Il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui commence. Expliquer cette stratégie

**Exercice 15**

Montrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout $n \geqslant 0$

**Exercice 16**

Déterminer tous les entiers $n$ naturels non nuls tels que $n + 1 | n^2 + 1$

**Exercice 17**

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7
   En déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on considère $N_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$
   (a) Si $p = 3n$ quel est le reste de la division de $N_p$ par 7 ?
   (b) Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors $N_p$ est divisible par 7
   (c) Etudier le cas où $p = 3n + 2$

**Exercice 18**

1. Montrer que $6 | n^3 + 5n$ pour tout $n$
2. Montrer que $30 | n^5 - n$ pour tout $n$
3. Trouver tous les entiers $n$ tel que $120 | n^5 - n$

**Exercice 19**

Démontrer que $3 | a^2 + b^2 \iff 3 | a$ et $3 | b$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

**Exercice 20**

Démontrer que si $7 | a^2 + b^2$ alors $7 | a$ et $7 | b$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

**Exercice 21**

Montrer que $2^n$ ne divise jamais $n!$

**Exercice 22**

Montrer que $13 | 2^{70} + 3^{70}$

**Exercice 23**

Déterminer tous les entiers relatifs $x$ différents de 3 tels que $x - 3 | x^3 + 1$

**Exercice 24**

Montrer que $11 \times 31 \times 61$ divise $20^{15} - 1$

**Exercice 25**

Quel est le reste de la division par 7 de $2017^{7102} + 7102^{2017}$ ?

**Exercice 26**

Montrer que le chiffre des unités de $1 + 4 + 4^2 + .... + 4^n$ vaut 1 si $n$ est pair et 5 si $n$ est impair

**Exercice 27**

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad 19 | 2^{2^{6k+2}} + 3$

**Exercice 28**

Déterminer le chiffre des unités et des dizaines de $2^{1000}$

**Exercice 29**

Montrer que 21 divise $2^{4^n} + 5$ pour tout $n \geqslant 1$

Montrer que 7 ne divise jamais $2^n + 1$

**Exercice 30 (BAC)**

On considère l'algorithme suivant où Ent(A/N) désigne la partie entière de A/N

A et N sont des entiers naturels

N prend la valeur 1

Tant que $N \leqslant \sqrt{N}$

Si $\dfrac{A}{N}$ - Ent($\dfrac{A}{N}$) $= 0$ alors afficher $N$ et $\dfrac{A}{N}$

Fin si

$N$ prend la valeur $N + 1$

Fin Tant que

1. Quel résultat affiche cet algorithme pour $A = 12$ ?
2. Que donne cet algorithme dans le cas général ?

**Exercice 31**

Justifier que $n^5 + n^4 + 1$ est composé pour tout $n > 1$

**Exercice 32**

Montrer que tous les nombres de la forme 12008, 120308, 1203308, ... sont divisibles par 19

**Exercice 33**

*Enigme du journal Le Monde : Affaire de logique 23/08/17*

François, mathématicien fasciné par les grands nombres, en a trouvé un doté d'une propriété tout à fait étonnante ? : si on écrit un « 1 » à la gauche et un « 1 » à la droite de cet entier naturel de moins de 100 chiffres, alors on obtient un nombre 99 fois plus grand que lui.

1. Donner les 9 derniers chiffres de ce nombre

2. Donner le nombre de chiffres de ce nombre

**Exercice 34**

1. Démontrer l'identité de Sophie Germain :

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

2. Démontrer que si $n > 1$ alors $n^4 + 4^n$ n'est pas premier

**Exercice 35**

Montrer que $3n - 1$, $5n - 2$, $5n + 2$, $7n - 1$, $7n - 2$ et $7n + 3$ ne sont pas des carrés

**Exercice 36**

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n > 0$ tel que $n|2^n + 2$

**Exercice 37**

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers $n > 1$ tel que $n|2^n - 1$

**Exercice 38**

Montrer que si $n$ entier $\geqslant 1$ et impair alors $n|2^{n!} - 1$