DS n°1- TS - spécialité maths

Ex n°1 (5 points)

Tout entier naturel n s'écrit dans le système décimal $n = \sum_{k=0}^{k=p} c_k 10^k$ où les c_k sont les chiffres de 0 à 9

1. A partir de $10 \equiv 1$ [9] et de l'écriture précédente de n, montrer que tout entier naturel est congru à la somme de ses chiffres modulo 9
2. Comment traduit-on dans le langage des congruences "un entier naturel n est divisible par 9" ?
3. En déduire un critère pour prouver qu'un entier naturel est divisible par 9

Ex n°2 (5 points)

On observe que la congruence $14 \equiv 2$ [12] reste vraie pour tous les diviseurs d de 12, ainsi par exemple $14 \equiv 2$ [3] ou encore $14 \equiv 2$ [4]

1. Montrer que si $a \equiv b$ $[n]$ et si $d|n$ alors $a \equiv b$ $[d]$
2. Est-ce vrai si au lieu de regarder les diviseurs, on regarde les multiples ?
   (a) En partant de $14 \equiv 2$ [3] trouver un contre-exemple qui rend faux l'équivalence précédente pour un autre multiple de 3
   (b) Par contre prouver que si $a \equiv b$ $[d]$ et si k divise a et b mais pas d alors $a \equiv b$ $[kd]$ (on **utilisera** la propriété : si c divise ab et si c ne divise pas a alors c divise b)

Ex n°3 (5 points)

1. A partir de $2^{10} \equiv 1$ [11] prouver que $2^{2017} \equiv 7$ [11]
2. Quelle est la prochaine année m où 2^m est congru au chiffre des unités de l'année modulo 11 ?

Ex n°4 (5 points)

1. Montrer que pour tout n entier naturel $2^{3n+1} + 5$ est divisible par 7
2. Par ailleurs montrer que pour tout entier naturel k, $2^{2k} \equiv 1$ [3]
3. En déduire que pour tout entier naturel k, $2^{2^{2k}} + 5$ est divisible par 7 (une démonstration par récurrence de ce résultat s'en utiliser le 1) et le 2) sera aussi valorisé)

Ex n°5 Bonus

1. On rappelle que le chiffre des unités d'un entier naturel est le reste de la division euclidienne de ce nombre par 10.
   Créer un problème formulé ainsi : " Prouver que le chiffre des unités de ....est .... " à partir de l'observation suivante :
   $7^2 \equiv -1$ [10], puis résolvez le
2. Démontrer la propriété de l'exercice 2

Correction

Ex n°1

1. Puisque $10 \equiv 1\ [9]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $10^k \equiv 1^k \equiv 1[9]$ donc pour tout chiffre c_k on a $c_k 10^k \equiv c_k[9]$ et finalement par somme $\sum_{k=0}^{p} c_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p} c_k[9]$
2. On traduit "un entier naturel n est divisible par 9" par $n \equiv 0[9]$
3. Du 1) et 2) on en déduit n est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres de n est congru à 0 modulo 9, autrement dit la somme des chiffres de n est divisible par 9

Ex n°2

1. $a \equiv b\ [n]$ peut être traduit de deux manières, soit $n|a-b$, soit il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + mn$. On choisit ici la première donc $n|a-b$ et puisque $d|n$ alors par transitivité $d|a-b$ autrement dit $a \equiv b\ [d]$
2. Regardons maintenant vers les multiples
   (a) $14 \equiv 2\ [3]$ mais $14 \equiv 5\ [9]$, donc $14 \equiv 2\ [9]$ est faux
   (b) Si $a \equiv b\ [d]$ donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + md$. Mais k divise a et b donc il existe l et l' entiers relatifs tel que $a = kl$ et $b = kl'$
   Donc $kl = kl' + md$ donc $k(l - l') = md$ autrement dit k divise md mais par hypothèse k ne divise pas d donc d'après la propriété (fausse !) k divise m donc il existe un entier relatif l'' tel que $m = l''k$ donc
   $a = b + l''(kd)$ autrement dit $a \equiv b[kd]$
   (La propriété est fausse, voici un **contre-exemple** : 4 divise $60 = 6 \times 10$, mais ne divise pas 6 mais ne divise pas plus 10 mais il y a quelque chose de vrai que nous verrons bientôt : si c divise ab et si c **n'a aucun nombre premier en commun avec** a (on dit que c et a sont premiers entre eux) alors c divise b (Théorème de Gauss))

Ex n°3

1. $2^{10} \equiv 1\ [11]$ or $2017 = 201 \times 10 + 7$ donc $2^{2017} = (2^{10})^{201} \times 2^7 \equiv 1 \times 2^7 \equiv 7$
2. Pour les mêmes raisons que précédemment on a $2^{2027} \equiv 7[11]$. Il reste à regarder s'il existe éventuellement une année entre 2017 et 2027 vérifiant cette propriété.
   Il suffit de regarder toutes les puissances 2^r modulo 11 avec r entier naturel entre 0 et 9
   Or $2^0 \equiv 1[11]$, $2^1 \equiv 2[11]$, $2^2 \equiv 4[11]$, $2^3 \equiv 8[11]$, $2^4 \equiv 5[11]$, $2^5 \equiv -1 \equiv 10[11]$, $2^6 \equiv -2 \equiv 9[11]$, $2^7 \equiv -4 \equiv 7[11]$, $2^8 \equiv -8 \equiv 3[11]$, $2^9 \equiv 6[11]$ donc il n' y a pas d'autres années entre 2017 et 2027

Ex n°4

1. $2^3 = 8 \equiv 1[7]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2^3)^n = 2^{3n} \equiv 1[7]$ donc $2^{3n+1} = 2^{3n} \times 2 \equiv 2[7]$ donc en ajoutant de part et d'autre 5 on a $2^{3n+1} + 5 \equiv 2 + 5 \equiv 0[7]$
2. $2^2 \equiv 1\ [3]$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $(2^2)^k \equiv 1[3]$ donc $2^{2k} \equiv 1[3]$

3. $2^{2k} \equiv 1[3]$ signifie que pour tout k entier naturel il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{2k} = 3n + 1$ donc pour tout k entier naturel $2^{2^{2k}} + 5 \equiv 0[7]$
4. (Par récurrence) Initialisation : $2^{2^{2\times 0}} + 5 = 2 + 5 \equiv 0[7]$
   Hérédité : Supposons que pour un certain k entier naturel $2^{2^{2k}} \equiv -5[7]$
   Maintenant $2^{2^{2(k+1)}} = 2^{2^{2k+2}} = 2^{2^{2k}\times 2^2} = (2^{2^{2k}})^4 \equiv (-5)^4 \equiv 25 \times 25 \equiv 2 \equiv -5[7]$
   Conclusion : La propriété est vraie pour tout k entier naturel

Ex n°5

1. Montrer que le chiffre des unités de $1 + 7^2 + 7^4 + ... + 7^{2018}$ est 0
2. Deux contre-exemples :
   (a) 4 divise $60 = 6 \times 10$ et 4 ne divise pas 6 ce qui ne signifie pas que 4 divise 10
   (b) $32 \equiv 8[12]$ or 8 divise 32 et 8 et 8 ne divise pas 12 mais 32 n'est pas congru à 8 modulo $8 \times 12 = 96$

   La propriété **corrigée** est donc :
   $a \equiv b[d]$ et si $k|a$ et si $k|b$ avec k **premier avec** d donc $a \equiv b[kd]$